Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

TEORIE INTEGRÁLŮ A JEJICH ŘEŠENÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Tereza Doskočilová

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Fy

2011-2013

Vedoucí práce: *Mgr.Lukáš Honzík*

Plzeň, 1. březen 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 2013

………………………………………….

vlastnoruční podpis

OBSAH

1 ÚVOD

Už od počátků věků lidé využívali k běžnému životu početní úkony. Ať se jednalo o nákup a prodej na trhu nebo například vyměřování polností. Matematika vždy patřila a bude patřit k našim životům a chodu světa. Postupem času se z jednoduchých matematických příkladů vyvinuly složitější a lidé tak byli schopni aplikovat tuto přírodní vědu i v jiných oborech.

Ve své diplomové práci se zabývám integrálním počtem. Toto obsáhlé téma jsem rozdělila pro lepší a názornější pochopení na dvě stěžejní kapitoly, určitý a neurčitý integrál.

Kapitolu neurčitý integrál jsem pojala obsáhleji. V této kapitole se opět zabývám různými metodami řešení tohoto integrálu a připojuji k nim příklady, na kterých názorně uvádím jak postupovat při konkrétní metodě řešení.

Jednotlivé metody jsou: tabulková metoda, metoda per partes, se kterou se ještě setkáme v kapitole určitý integrál. Další metodou je substituční metoda.

V této kapitole se dále zabývám určováním primitivní funkce k racionálně řešené funkci a dále jsem se rozhodla rozvést téma rozkladu na parciální zlomky. V neposlední řadě zde uvádím integraci funkcí, jejichž integrací můžeme převést na integraci racionálně lomené funkce.

V kapitole určitý integrál na různých příkladech demonstruji, jakými metodami lze tento integrál řešit. Mezi podkapitoly jsem zařadila: Reimannovu definici určitého integrálu, Newtonovu definici určitého integrálu, metodu per partes pro určitý integrál a jako poslední jsem zvolila substituční metodu pro určitý integrál. Pro správné pochopení této látky je velmi důležité ukázat a vysvětlit na příkladech, jak správně a efektivně počítat integrál. U každé metody to poukazuji na několika příkladech.

Další kapitolou, kterou zde uvádím je aplikace integrálu v geometrii. Zde využijeme naše dosavadně získané znalosti z oblasti diferenciálního a integrálního počtu.

Jako závěrečnou kapitolu zde uvádím aplikaci integrálu ve fyzice. Tuto kapitolu jsem zařadila zcela záměrně vzhledem k mému druhému studijnímu oboru. Matematika a fyzika se prolínají a já chtěla čtenáři přiblížit, jak se jeden obor chová ve druhém a naopak.

2 INTEGRÁLNÍ POČET

2.1 POJEM INTEGRÁLNÍ POČET

Co je to integrální počet a k čemu se využívá:

- Integrální počet využíváme k určení plochy, délky křivky, objemu rotačních tělesa.
- K výpočtům ve fyzice, kde pomocí integrálů můžeme například počítat moment setrvačnosti, nebo dráhu.
- K určení funkce, pokud máme již definovanou její derivaci, protože jak se později dozvíme integrace je inverzní proces derivace a naopak.

Známe dva základní typy integrálního počtu:

- Určitý integrál
- Neurčitý integrál

2.2 HISTORIE INTEGRÁLNÍHO POČTU

Matematika starověku

V období starověku byla matematika zpočátku používána pouze pro cyklické změny v počasí, které bylo třeba znát pro běžný život. Dalším krokem ve vývoji matematiky bylo využití počtů při vyměřování a stavbě zavlažovacích zařízení. Prvotní poznatky geometrie byly objeveny při vyměřování zaplavených ploch. Každá kultura v tomto období se vyvíjela jinak a používala jiné metody uchování dokumentů, proto také známe jen některé. V Mezopotámii používali k záznamu hliněné destičky, které poté vypalovaly – z tohoto období se dochovalo mnoho záznamů, v Egyptě se zapisovalo na papyrus, který nebyl tak dobrý jako destičky, ale svému účelu posloužil podobně dobře, Čína a Indie používali pro záznam kůru a bambus, který podléhal rychlé zkáze a proto se z tohoto období nedochovalo mnoho písemných památek. Nejznámější písemnou památkou se stal zachovaný Moskevský papyrus a Londýnský papyrus. Egypťané používali pro výpočet objemu plochy trojúhelníky, které rozdělili do plochy, následně vypočítali obsahy trojúhelníků a sečetli je. S výpočtem obsahu trojúhelníku byli dobře seznámeni, používali pro to vzorec součinu poloviny základny a výšky. Na papyrech může naleznout výpočty objemů krychle, kruhového válce. Další pozoruhodností egyptské matematiky jsou bezesporu pyramidy, jež by bez znalosti počítání s velkými čísly nebylo možné postavit. Velký podíl na rozvoji matematiky měla astronomie, kterou staří Egypťané používali při předvídaní změn v počasí. Podobně na tom byla matematika v Mezopotámii, kde podle doložených hliněných tabulek pracovali s aritmeticko-algebraickými znalostmi a s geometrií. Ve starověkém Řecku byla situace jiná, lidé měli na fyzickou práci otroky, a tudíž se jejich mysl mohla zabývat filosofickými otázkami, už nezaznělo jak?, nýbrž přišla otázka proč?. Přešlo se z praktické matematiky na její teoretickou část, která obsahovala návody na řešení příkladů, ale dokonce odůvodnění správnosti řešení.

Důležité osobnosti z tohoto období:

- Tháles z Miletů (průměr dělí kruh na dvě poloviny, vrcholové úhly jsou stejně, Tháletova věta)
- Pythagoras (vedl skupinku filosofů, jejich heslem bylo „všechno je číslo“, odhalili iracionalitu jako nesouměřitelnost úseček)
- Zenón (slepé uličky – teorie Letícího šípu, Zajíc a želva – to jsou jedny z jeho teorií, kdy se snažil poukázat na rozpory mezi naším smyslovým vnímáním a jeho logickým výkladem)
- Hippocrates (jeho zásadní práce byla ta, kde se snažil vyřešit problém kvadratury kruhu a zdvojení kruhu, přičemž používal pouze pravítko a kružítko)
- Eukleides (jeho dílem je třináct knih Základů, kde demonstruje teorii čísel, rovinnou geometrii, geometrii těles a Eudoxovu teorii nesouměřitelných těles)
- Archimédes (největším přínosem jsou jeho věty o obsahu rovinných útvarů a objemu těles, ve svých dílech se orientuje k proměnným, jeho práce je dynamická, na rozdíl od Eukleida)

Pro nás je důležitá matematika ve vztahu k integrálu a ta se ve starověku projevovala intuitivním přístupem avšak zároveň strachem z počítání s malými veličinami. Díky exhaustivní metodě došlo k rozvoji účinných technik k výpočtu obsahu a objemu.

16.-18. Století

Po rozpadu římské říše došlo k úpadku vzdělanosti, tento problém se týkal především západu (Evropy), jediným zdrojem vzdělanosti byly kláštery a ani tam nebyla úroveň vzdělání vysoká. S příchodem 11. století a rozvojem výroby a obchodu se situace začala zlepšovat, po obnovení obchodních cest byla překládána velká díla autorů starověku a mohly se šířit myšlenky Eukleida, Archimédese. Velmi důležité pro rozvoj matematiky se staly university, rozšíření matematiky ovlivnilo i vynález knihtisku, pomocí něhož se mohla věda rychleji šířit širokému obyvatelstvu. I zde si uvedeme výjimečného myslitele:

Leonardo da Vinci

- Pro svou vědeckou práci využíval Archimédovy myšlenky, díky nimž mohl lépe pochopit těžiště obrazců a těles.

16. století bylo renesancí ve všech ohledech, matematiku nevyjímaje. V tomto období šlo především o rychlý výsledek, ne o přesný důkaz.

Johann Kepler

- přišel první s infinitezimální metodou, kdy rozdělil těleso na mnoho malých kusů, jejichž objem lze jednoduše určit
- jeho další známou myšlenkou je určování obsahu kruhu
- díky jeho přesnosti došlo k rozvoji moderních integračních metod

Galileo Galilei

- osobně nic neuveřejnil, avšak jeho myšlenky rozpracovali jeho žáci

Bonaventura Cavalieri

- ve svém díle přišel s jednoduchou formou pro výpočet objemu tělesa, dnes je známa jako Cavaliereho princip
- tato metoda se zcela rozchází s Keplerovým přístupem

René Descartes

- vytvořil analytickou geometrii, když na starověkou geometrii aplikoval algebru

Pierre de Fermat

- výrazně zasáhl do matematiky svou spoluprací s významnými matematiky
- sám přispěl k teorii čísel

Blaise Pascal

- sestrojil počítací stroj
- formuloval a dokázal binomickou větu a vytvořil Pascalův trojúhelník, pronikl do procesu integrace, zkoumal cykloidu

Isaac Barow

- znal vzájemnou souvislost mezi derivací a integrací

Isaac Newton

- fyzik, matematik a astronom
- zabýval se mimo jiné gravitačními zákony, základy mechaniky, základy hydrodynamiky, optikou a korposkulární teorií světla
- jako první se zaobíral teorií fluxe a fluent
- definice Newtonových úloh jeho matematické analýzy:

1. ze znalosti dráhy pohybu hmotného bodu v každém okamžiku lze nalézt rychlost tohoto pohybu v určitém čase

2. ze znalosti rychlosti hmotného bodu lze v každém okamžiku určit dráhu, kterou tento bod urazí za určitý čas

- první z těchto úloh je výpočet derivace, která vede k výpočtu integrálu

• při hledání východiska, kdy řešil jak si poradit s nenulovými veličinami, které však nevyřešil, vytvořil metodu prvních a posledních poměrů, což vedlo k počátku teorie limit

• jeho metoda fluxe, nese od počátku znaky algoritmizace založené zejména na diferencování a také na tom, že integrování je chápáno jako inverzní operace k diferencování

• mezi další Newtonovi úspěchy patří vypracování tabulky integrálů, objevil substituční metodu výpočtu integrálu, získal mocninné řady pro mnoho výpočtu a mnoho dalšího

Gottfried Wilhelm Leibniz

• objevil a popsal vlastnosti nekonečné řady, jež dostala jeho jméno

• kladl velký význam symbolice, díky němu máme dnes jak popisovat různé symboly v matematice

• předložil pravidla pro řešení úloh tečen a kvadratur

• svou teorii založil na základě charakteristického trojúhelníku

• rozvíjel také metody zkoumání křivek a funkcí

Období 16-18. Století můžeme shrnout do těchto bodů:

1. dohází k vzájemného propojení diferencování a integrování

2. určitý integrál, který se staticky propojil s neurčitým, jež je dynamický

3. matematika byla úzce svázána s fyzikou

4. byla stvořena důmyslná symbolika a algoritmický aparát

18. století

V tomto století se matematická analýza stává samostatnou jednotkou nezávislou na mechanice a geometrii. Díky tomu můžeme řešit konkrétní problémy ve fyzice, astronomii a dalších vědách. Významné osobnosti této doby:

Leonhard Euler

- Autor mnoha matematických učebnic
- Rozvíjel matematiku v každé její oblasti
- Jako první definuje logaritmus jako exponent
- Zavádí číslo e jako základ přirozeného logaritmu

19. století

V tomto století byly objasněny nesrovnalosti, které se nahromadily ve století předcházejícím. Bylo nutné rozlišit pojmy konvergence a absolutní konvergence řad apod.

Augustin Louis Cauchy

- Položil základy matematické analýzy, tak jak ji známe dnes
- Významný krok vykonal i v teorii obyčejných diferenciálních rovnic
- Formuloval novou definici integrálu

George Friedrich Bernhard Riemann

- Jako první rozlišil vlastní a nevlastní určitý integrál

Toto století přineslo matematice velmi důležité poznatky. Jedná se o tyto:

1. Zavedení součtové a konstruktivní definice integrálu
2. Základ pro vznik teorie míry

20. století

Henry Leon Lebesgue

- Podává deskriptivní definici integrálů, jedná se o systém axiomů, jež má integrál splňovat
- Zároveň definuje problém teorie míry
- Lebesgueův integrál získal postupem času velmi silnou pozici, neboť je velmi vhodný pro vyšetřování ve funkcionální analýze

Perronův integrál

- Odstranil nesrovnalosti mezi Newtonovým a Lebesgueovým pojetím integrálu

2.3 PRIMITIVNÍ FUNKCE

K tomu, abychom mohli definovat neurčitý integrál, je důležité znát pojem PRIMITIVNÍ FUNKCE.

2.3.1 DEFINICE PRIMITIVNÍ FUNKCE

Mějme dány funkce $F(x), f(x)$ definované na otevřeném intervalu J. Jestliže $\forall x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$, říkáme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v otevřeném intervalu.

2.3.2 URČENÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE

PŘÍKLAD:

Zkusme najít primitivní funkci, pokud známe $f(x) = \cos x$, je zřejmé, že primitivní funkcí k námi zadané bude $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$.

2.4 PŘÍKLADY NA URČENÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = 2x$.

ŘEŠENÍ:

Vznikne nám funkce, kterou když derivujeme, dostaneme se k funkci původní.

Bude to tedy $F(x) = x^2$ a platí tedy, že $f(x) = F'(x)$.

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Nalezněte primitivní funkci k $f(x) = 3x^2 + 2x$

ŘEŠENÍ:

Primitivní funkci dostaneme tím, že zadanou funkci integrujeme, to znamená, že jednotlivé sčítance integrujeme pomocí tabulkové metody, získáme tak primitivní funkci: $\boldsymbol{\int 3x^2 + 2x = x^3 + x^2 + c}$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Nalezněte primitivní funkci k $f(x) = \; 3e^2$

ŘEŠENÍ:

Primitivní funkci, kterou hledáme, získáme tak, že zadanou funkci integrujeme a výsledku dosáhneme tím, že zadanou funkci $3e^2$, integrujeme podle tabulkové metody viz. předchozí kapitola a v konečném výsledku dostaneme:

$$\boldsymbol{\int 3e^2 \, dx = \; 3e^2 x + c}$$

3 NEURČITÝ INTEGRÁL

Neurčitý integrál, jeden ze základních typů integrálů, můžeme nadefinovat jako:

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,, kde\ F'(x) = f(x)$$

$\int -$ *znak integrálu*

$f(x) -$ *integrand*

$dx -$ *integrální proměnná*

c— integrační konstanta

$F(x) -$ *primitivní funkce k funkci* $f(x)$

Výsledkem neurčitého integrálu je funkce, nebo množina funkcí.

3.1.1 INTEGRAČNÍ PRAVIDLA

1. pravidlo: Pravidlo pro součet a rozdíl integrál a jejich funkcí

To jest, pokud máme integrál ze součtu nebo rozdílu dvou funkcí, můžeme využít toho, že tento integrál můžeme rozepsat jako rozdíl nebo součet dvou integrálů.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

2. pravidlo: Konstanta v integrálu

Pokud integrál obsahuje konstantu, lze tuto konstantu vytknout před integrál.

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

3.1.2 JAK POSTUPOVAT PŘI URČOVÁNÍ NEURČITÉHO INTEGRÁLU, ZÁKLADNÍ INTEGRAČNÍ METODY

Zde můžeme použít několik metod pro určování integrálu, k jeho výpočtu.

- Tabulkové integrály, základní primitivní funkce
- Metoda per partes, tj. integrování po částech
- Substituční metoda
- Metody, po jejichž integrování dostaneme racionálně lomenou funkci

3.1.3 TABULKOVÁ METODA

Zde si uvedeme základní neurčité integrály, základní primitivní funkce

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x>0; \qquad \text{pro } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}(x) + C,\ x \neq k\pi$$

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \mathrm{tgh}(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotgh}(x) + C,\ x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1,1)$$

(*http://math.feld.cvut.cz.* [Online] [Citace: 9. 7 2012.] http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3a.htm.)

Obrázek č. 1

3.1.4 PŘÍKLADY NA POUŽITÍ TABULKOVÉ METODY

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál vhodnou metodou $\int (\sin(x) + 3)dx$.

ŘEŠENÍ:

- Použijeme integraci jednotlivých členů výrazu, pomocí tabulky základních primitivních funkcí zjistíme, že integrací $\int \sin x\; dx = -\cos x$ a $\int 3\; dx = 3x$
- $\boldsymbol{\int (\sin(x) + 3)dx = -\cos(x) + 3x + c}$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

VYŘEŠTE DANÝ INTEGRÁL POMOCÍ TABULKY ZÁKLADNÍCH PRIMITIVNÍCH FUNKCÍ $\int (8x^3 + x^2)dx$

ŘEŠENÍ:

Opět využijeme integraci jednotlivých členů, budeme postupovat podle předchozího příkladu, opět využijeme vzorce ze základní tabulky integrálů

$$\int (8x^3 + x^2)dx = 2x^4 + \frac{x^3}{3} + c$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Vyřešte dané integrály pomocí postupů uvedených v předchozích příkladech:

ŘEŠENÍ:

- $\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{2}\mathbf{cos(2x)} + \boldsymbol{c}$
  - Integrací $\int sinxdx = cosx + c$, zde máme i argument, který po-té také integrujeme a dostaneme $-\frac{1}{2}\mathbf{cos(2x)} + \boldsymbol{c}$**.**
- $\int (x^3 + 3x)\, dx = \frac{1}{4}\boldsymbol{x^4} + \frac{3}{2}\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{c}$
  - V tomto příkladu využijeme pouze tabulkové metody a jednotlivé členy integrujeme.
- $\int x^3 + x^2 + x\, dx = \frac{1}{4}\boldsymbol{x^4} + \frac{1}{3}\boldsymbol{x^3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{c}$
  - V tomto příkladu využijeme pouze tabulkové metody a jednotlivé členy integrujeme.

3.1.5 METODA PER PARTES

DEFINICE:

Mají-li funkce $f(x), g(x)$ v intervalu (a, b) spojité derivace, potom v (a, b) platí:

$$\int f(x).\, g'(x)dx = f(x).\, g(x) - \int f'(x).\, g(x)dx + c$$

DŮKAZ:

Metoda per partes je založena na vztahu pro derivování součinu

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$uv = \int u'v + \int uv'dx$$

Pokud vyjádříme první z integrálů, dostaneme vztah pro per partes a to:

$$\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$$

3.1.6 PŘÍKLADY NA POUŽITÍ PER PARTES

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Metodou per partes vyřešte zadaný integrál $\int x.\sin 2x\; dx$.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si zvolíme vhodně proměnné a to následujícím postupem. Zvolíme si jako $u(x) = x$, ta mi v následujícím výpočtu sníží derivaci o jeden stupeň, tak budeme dále integrovat pouze goniometrickou funkci a to známe již z tabulkových integrálů, proto volíme tento postup.

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v = -\frac{1}{2}\cos 2x \qquad v' = \sin 2x$$

Pomocí vzorce pro per partes dopočteme integrál a to tak, že vynásobíme funkci $u\ a\ v$ od $\frac{1}{4}\boldsymbol{sin\ 2x}$,odečteme integrál $\int uv'dx$ výsledkem, bude:

$$\int \boldsymbol{x.\sin 2x = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x.\cos 2x + c}$$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Metodou per partes vyřešte zadaný integrál $\int x \cdot \ln x\, dx$

ŘEŠENÍ:

$$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$$

$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad v' = x$$

Jako funkci $u(x) = lnx$ jsme si zvolili z toho důvodu, že tuto funkci umíme derivovat, ale ne integrovat, proto výše uvedený výběr. Dále využijeme toho, že derivace $lnx = \frac{1}{X}$, proto nám po provedení jednoho per partes vznikne integrál z polynomu.

Poté dosadíme do vzorce pro per partes $\int u'v\ dx = uv - \int uv'\ dx$ a dopočteme, výsledkem bude

$$\int \boldsymbol{x.\ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c}$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Metodou per partes vyřešte zadaný integrál $\int \mathbf{arcsin}\, \boldsymbol{x}$ **.**

ŘEŠENÍ:

$$u = \arcsin x \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v = x \qquad\qquad v' = 1$$

Jako $u(x) = arcsinx$ volíme, protože jej umíme derivovat, ale ne integrovat, abychom docílili možnosti použít metodu per partes, musíme volit ještě druhou funkci, kterou zvolíme 1, tu umíme integrovat, protože víme, že $\int 1\, dx = x + c$,dále nám již vyjde výraz, který jsme schopni pomocí tabulky primitivních funkcí integrovat a dosadit do vzorce pro per partes, který si připomeneme $\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$.

Výsledkem bude:$\int \mathbf{arcsin}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.\boldsymbol{arcsin}\, \boldsymbol{x} - \int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}} \boldsymbol{dx}$

$\int \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}} \boldsymbol{dx}$ – vzniklý integrál je následně možné řešit substituční metodou, kterou budeme řešit v další kapitole, tento příklad si tam demonstrujeme.

PŘÍKLAD Č. 4

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál pomocí metody per partes $\int x^2 \,.\, e^x$

ŘEŠENÍ:

Vzhledem k tomu, že polynom je v druhé mocnině, budeme muset per partes použít dvakrát.

Nejprve si vhodně zvolíme proměnné, abychom mohli metodu per partes použít, v následující tabulce jsou proměnné a jejich derivace pro výpočet uvedeny. Integrací $\int x^2 dx = 2x + c$, derivací e^x je e^x, proto tato volba.

$$u = x^2 \quad u' = 2x$$

$$v = e^x \quad v' = e^x$$

$$I = \int \boldsymbol{x^2 . e^x} = \boldsymbol{x^2 . e^x} - \int \boldsymbol{2x . e^x dx}$$

Jelikož nám zbyl opět integrál, který se řeší metodou per partes, opět si zvolíme proměnné a to takto:

$$\int 2x . e^x dx$$

$$u = 2x \quad u' = 2$$

$$v = e^x \quad v' = e^x$$

Po integraci nám vyjde $\int 2x.e^x dx = 2x.e^x$, výsledkem bude dán jako $\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$, který pokud vezmeme první per partes, tak dostaneme $\boldsymbol{x^2.e^x - 2x.e^x}$ a k tomu výsledku přičteme výsledek druhého per partes.

$$\boldsymbol{I = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x}$$

3.1.7 SUBSTITUČNÍ METODA

3.1.8 VĚTA Č. 1.: O SUBSTITUČNÍ METODĚ 1. DRUHU

Nechť funkce $F(y)$ je primitivní funkce k funkci $f(y)$ v intervalu(α, β). Nechť funkce $y = g\,(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu(a, b).Pro každé $x\epsilon(a, b)$, nechť hodnota $g(x)$ patří do intervalu (α, β).Pak v intervalu (a, b) je funkce $F(g(x))$ primitivní funkce k funkci $f((g)x)\ \cdot g'(x)$.

3.1.9 VĚTA Č. 2 : O SUBSTITUČNÍ METODĚ 2. DRUHU

Nechť $f(x)$ je spojitá v (a, b).

Nechť $g(t)$ má spojitou derivaci v jistém intervalu (c, d).

Nechť všechny funkční hodnoty $g(t), t\ \epsilon(c, d)\ vyplní\ (a, b)$.

Označíme-li $\int f(x)\ \cdot g'(t)dt = F(t)$ platí v (a, b) :

$$\int f(x)dx = F((\varphi)x) +\ c\ , c\epsilon R$$

$\varphi(x)$ je inverzní funkcí k funkci $x = f(t), kde\ t\ \in (c, d)$.

- Substituci využíváme typicky v příkladech, kde se v integrálu objevuje derivace nějakého výrazu nacházejícího se v daném integrálu, a tento výraz označíme novou proměnnou.

3.1.10 PŘÍKLADY NA POUŽITÍ SUBSTITUČNÍ METODY

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Pomocí vhodné substituce vyřešte $\int \frac{\cos x}{sin^2 x} dx$

ŘEŠENÍ:

Zvolíme vhodnou substituci, tak abychom po derivaci neznámé, dostali zpět proměnnou, která se nám bude lépe integrovat. Pokud substituci dobře provedeme proměnná x se nám vykrátí a zbude nám pouze nová proměnná u, což v tomto případě využijeme.

Platí zde pravidlo o substituční metodě 1. druhu, což pokud si jako substituovanou neznámou zvolím $sinx = t$, dostanu po diferencování $dx = \frac{dt}{cosx}$.

Substituce:

$$sinx = t$$

$$cosxdx = dt$$

Jak je jasně vidět, pokud si zapíšeme tento integrál s vhodně zvolenou substitucí, $\int \frac{cosx}{t^2} \cdot \frac{dt}{cosx}$, pak se nám $cosx$ vykrátí a zůstane jen jednoduchý integrál, který již umíme spočítat.

Dosazením substituce dostaneme $\int \frac{1}{t^2} dt$,což dává po zpětném dosazení substituce $\boldsymbol{I = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{sinx} + c}$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Vhodnou substitucí vyřešte zadaný integrál $\mathrm{e}^{4\mathrm{x}}dx$.

ŘEŠENÍ:

Diferencováním nám vzniká pouze číslo, které je možné vytknout před integrál, proto můžeme vytknout konstantu 4 a dále tento integrál dopočítat níže zvolenou substitucí.

Substituce:

$$4x = u$$

$$du = 4dx \rightarrow \frac{du}{4} = dx$$

V tomto integrálu opět využije 1. substitučního pravidla, které jsme si uvedli výše. Po nahrazení proměnných v integrálu substitucí dostaneme

$$\frac{1}{4}\int e^u \, du = \frac{e^{4x}}{4} + c = \boldsymbol{\frac{e^{4x}}{4} + c}$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Pomocí vhodné substituce vyřešte daný integrál $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$.

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu využijeme toho, že jako substituci proměnné x zvolíme $\cos t$, protože známe jeho derivaci a bude se nám s tím lépe pracovat. Můžeme tedy 1 rozložit na goniometrický vzorec $cos^2x + sin^2x = 1$, což nám usnadní další postup.

Jako substituci si tedy určíme:

$$x = \cos t$$

$$dx = -sintdt \rightarrow dt = -\frac{dx}{sinx}$$

Budeme tedy pokračovat v dosazování substituce do zadaného integrálu, $\int \sqrt{cos^2t + sin^2t - cos^2t}.sintdt = -\int sint.sint\ dt = -\int sin^2tdt = \int \frac{1-cos2t}{2}dt = -\int \frac{1}{2}dt - \int \frac{cos2t}{2}dt = -\frac{1}{2} - \frac{sin2t}{4} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\boldsymbol{sin2}.(\sqrt{\mathbf{1-x^2}})}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{c}.$

V tomto postupu vidíme, že jsme goniometrický vzorec využili hned několikrát, abychom si usnadnili práci.

PŘÍKLAD Č. 4

ZADÁNÍ:

Podle předchozích příkladů si zvolíme vhodnou substituci a poté integrujeme, do výsledného integrálu vrátíme zpětně substituci, zadaný integrál je $\frac{x^2}{1-x^3}$.

ŘEŠENÍ:

Tuto substituci volíme, protože derivace jmenovatele (až na konstantu) se nachází v čitateli.

Substituce:

$$1 - x^3 = u$$

$$du = -3x^2 dx$$

$$-\int \frac{\frac{1}{3}}{u} du = ln|u| + c = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \boldsymbol{ln}\left|\mathbf{1} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}\right| + \boldsymbol{c}$$

Jak jsme si všimli, ve výsledku je přirozený logaritmus s absolutní hodnotou, protože výraz v závorce může být menší než nula.

PŘÍKLAD Č. 5

ZADÁNÍ:

Podle předchozích příkladů si zvolíme vhodnou substituci a poté integrujeme, do výsledného integrálu vrátíme zpětně substituci, zadání integrálu: $\int (2x+1)^5 dx$

ŘEŠENÍ:

Vytkneme-li konstantu, můžeme ji dát před integrál, protože víme, že platí

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

a dále použít níže uvedenou substituci.

Substituce:

$$t = 2x + 1$$

$$dt = 2dx$$

$$dx = \frac{dt}{2}$$

Po integraci dostaneme následující výraz, potom je nutné pouze vrátit zpětně substituci.

- $\int (t)^5 = \frac{t^6}{6 \cdot 2} = \frac{\boldsymbol{(2x+1)^6}}{\mathbf{12}} + \boldsymbol{c}$

PŘÍKLAD Č. 6

ZADÁNÍ:

Podle předchozích příkladů si zvolíme vhodnou substituci a poté integrujeme, do výsledného integrálu vrátíme zpětně substituci, zadání integrálu: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

ŘEŠENÍ:

Postupujeme jako u příkladu č. 3.

$$1 + x^2 = u$$

$$du = 2dx$$

Dostaneme tedy výsledek: $\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + c = \boldsymbol{\sqrt{1 + x^2} + c}$

Ve výsledku je opět vidět, že vytkneme konstantu $\mathbf{\frac{1}{2}}$ před integrál a zbytek již dopočteme pomocí substituce.

PŘÍKLAD Č. 7

ZADÁNÍ:

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{1} + \boldsymbol{lnx})}$$

ŘEŠENÍ:

Derivace lnx je $\frac{1}{x}$, což se nám po dosazení do zadaného integrálu pokrátí, proto je nutné využít této substituce.

Substituce:

$$1 + lnx = u$$

$$\frac{1}{x}\,dx = du$$

Abychom si to dovedli lépe představit, sestavíme si integrál za pomoci substituce, tj. $\int \frac{x}{x} du$, pak dostaneme $\int du = ln|u| + c = \boldsymbol{ln}|\boldsymbol{1} + \boldsymbol{lnx}| + \boldsymbol{c}$. I zde máme nutnost absolutní hodnoty, protože přirozený logaritmus nabývá hodnot $\langle -\infty, \infty \rangle$.

PŘÍKLAD Č. 8

ZADÁNÍ:

$$\int \sqrt[3]{5 - 6x}\ dx$$

ŘEŠENÍ:

$$5 - 6x = u$$

$$6dx = du$$

$$dx = \frac{du}{-6}$$

Výsledkem tedy je integrál: $\int -\frac{\sqrt[3]{u}}{6} du = -\frac{1}{6} \int \sqrt[3]{u}\, du = -\frac{1}{6} . \frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c =$ $\boldsymbol{-\frac{1}{8} . \sqrt[3]{(5-6x)^4} + c}$

Ve výsledku je vidět již známé pravidlo vytýkání, poté již pouze dopočítáme integrál pomocí tabulky primitivních funkcí a zpětně vrátíme substituci.

PŘÍKLAD Č. 9

ZADÁNÍ:

Zde si vyřešíme příklad z kapitoly per partes, kterému dlužíme řádné vypočítání.

Zadání příkladu zní $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

ŘEŠENÍ:

V prvním kroku musíme zvolit vhodnou substituci, my si ji zvolíme tak, že $1 - x^2 = t^2$, pak tedy $-2xdx = 2tdt$, pokud dopočteme, vyjde nám, že $t = \sqrt{1 - t^2}$. Po dosazení substituce do námi zadaného integrálu nám zbude pouze integrál $\int -1\, dt$. Tento integrál umíme pomocí tabulkové metody dopočítat, bude se tedy rovnat $-t + c$, musíme však zpětně dosadit substituci, dostaneme tedy výsledek $-\sqrt{1 - t^2}$, po zpětném dosazení dostaneme $-\sqrt{1 - x^2} + c$.

3.1.11 URČOVÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE K RACIONÁLNĚ LOMENÉ FUNKCI

DEFINICE:

Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je racionální lomená funkce, $P(x)$je polymon stupně n a $Q(x)$je polynom stupně m.

Jestliže $n < m$, pak říkáme, že racionální funkce $f(x)$ je **ryze lomená.**
Jestliže $n \geq m$, pak říkáme, že racionální funkce $f(x)$je **neryze lomená.**

3.1.12 RYZE LOMENÁ FUNKCE:

Postup řešení:

1)Polynom $Q(x)$ rozložíme na součin lineárních a kvadratických faktorů.

2)Provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{A}{(x-b)}$$
$$\frac{AX+B}{(x^2-bx+c)}$$

,kde $A, B \in R, \alpha \in N$

3)Provedeme integraci.

3.1.13 NERYZE LOMENÁ FUNKCE

Můžeme ji vyjádřit jako součet lomené racionální funkce tj. $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m1}(x) + \frac{P_{m2}(x)}{Q_n(x)}, kde\ m_2 < n$

PŘÍKLAD:

$$R(x) = \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}$$

ŘEŠENÍ:

Máme polynom třetího stupně v čitateli a polynom druhého stupně ve jmenovateli, vydělíme je a dostaneme:

$$(x^3 + 2x^2 + x - 1) : (x^2 - x + 1) = x + 3$$

$$\underline{-(x^3 - x^2 + x)}$$

$$3x^2 - 1$$

$$\underline{-(3x^2 - 3x + 3)}$$

$3x - 4$, což je zbytek a dostaneme:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \frac{3x - 4}{x^2 - x + 1}$$

3.1.14 FUNKCE S NEROZLOŽITELNÝMI KVADRATICKÝMI ČLENY VE JMENOVATELI

ZADÁNÍ:

$$\int \frac{5x^2 + 18x + 19}{(x - 1) \cdot (x^2 + 4x + 5)} dx$$

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu využijeme toho, že $\frac{5x^2+18x+19}{(x-1)\cdot(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$, po-té

Využijeme rozkladu na parciální zlomky a to tak, že porovnáme koeficienty u neznámých x.

$$x^2: 5 = A + B$$

$$x^1: 18 = 4A + B + C$$

$$x^0: 19 = 5A + C$$

Vyjdou nám tedy tři rovnice o třech neznámých, po vyřešení rovnice dostaneme$A = 3, B = 2\ a\ C = 4$.

Pokud si vypočtené koeficienty vrátíme zpět do původní rovnice $\frac{3}{x+1} + \frac{2x+4}{x^2+4x+5}$.

Máme tedy integrál $\int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx$, integrál $\int \frac{3}{x+1} dx$ vyřešíme pouze s použitím tabulkové metody a to s výsledkem $\int \frac{3}{x+1} dx = 3ln|x+1|$, druhý integrál$\frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx$ budeme muset řešit pomocí substituce, zvolíme si tedy jako $u = x^2 + 4x + 5$, po diferencování dostaneme $du = 2x + 4\, dx$, výsledkem druhého integrálu bude tedy $ln|x^2 + 4x + 5|$. Abychom to shrnuli, pokud integrujeme $\int \frac{5x^2+18x+19}{(x-1)\cdot(x^2+4x+5)} dx$, pak výsledek bude $3ln|x+1| + ln|x^2 + 4x + 5| + c$.

3.1.15 Příklady na použití rozkladu na parciální zlomky

Příklad č. 1

ZADÁNÍ:

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\int \frac{2x-1}{(x-3)\cdot(x-4)}\, dx = \int \frac{Adx}{x-3} + \int \frac{Bdx}{x-4}$$

Poté si vytvoříme rovnici, nejprve napíšeme rovnici již bez značek integrálů

$$\frac{2x-1}{(x-3)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

Vynásobíme členy $(x-3)\ a\ (x-4)$

Člen A vypočítáme jako:

$$2x - 1 = A\cdot(x-4) + B\cdot(x-3)$$

$$2x - 1 = Ax - 4A + Bx - 3B$$

Pak porovnáme koeficienty u $x^1\ a\ x^0$.

Vypočítáme jako rovnici o dvou neznámých.

$$x^1: 2x = Ax + Bx$$

$$x^0: -1 = 4A - 3B$$

$$5 = -A$$

$$-5 = A,$$

z čehož plyne $2 = -5 + B$

$$B = 7$$

Poté mohu dosadit zpět a integrovat

$$\int \frac{-5}{x-3} dx + \int \frac{7}{x-4} dx = -5\ln|x-3| + 7\ln|x-4| = \boldsymbol{ln} \frac{\boldsymbol{(x-4)^7}}{\boldsymbol{(x-3)^5}} + \boldsymbol{c}$$

Z výsledku je vidět, že rozdíl přirozených logaritmů můžeme vyjádřit jako jejich podíl.

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

$$\int \frac{8x-31}{x^2-9x+14} dx$$

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu bude rozhodovat, jestli kvadratické trojčleny jsou rozložitelné, nebo nikoliv a o tom rozhodne diskriminant příslušné kvadratické rovnice.

Danou kvadratickou rovnici si rozložíme podle $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, vyjdou nám dva kořeny a to 7,2. Proto rozklad je roven $(x-7)\cdot(x-2) = x^2 - 9x + 14$.

$$\int \frac{8x-31}{(x-7)\cdot(x-2)}dx = \int \frac{A}{x-7}dx + \int \frac{B}{x-2}dx$$

$$8x - 31 = A\cdot(x-2) + B\cdot(x-7)$$

$$8x - 31 = Ax - 2A + Bx - 7B$$

Zde opět řešíme rovnici o dvou neznámých.

$$8x = Ax + Bx$$

$$-31 = -2A\text{-}7\mathrm{B}$$

$$-15 = -5B$$

Z daných rovnic nám vyšlo:

$B = 3 \quad A = 5$

Po zpětném dosazení do integrálu mi zbývá pouze použít tabulkovou metodu a příklad je vyřešen

$$\int \frac{5}{x-7}dx + \int \frac{3}{x-2}dx = \boldsymbol{5ln|x-7| + 3ln|x-2| + c}$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál rozkladem na parciální zlomky $\int \frac{2x+1}{2x^2-14x+24}dx$

ŘEŠENÍ:

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme $\int \frac{\frac{7}{2}}{x-4} - \frac{\frac{5}{2}}{x-3} dx$, rozklad na parciální zlomky provádíme podle postupu, který je uvedený v předešlých příkladech, kvadratickou rovnici se tedy vyřešíme, vyjdou nám dva kořeny $\frac{7}{2}$ a $\frac{5}{2}$, poté dosadíme zpět do rovnice a již použijeme pouze tabulkové integrace. Důležité je výrazy v přirozeném logaritmu dát do absolutní hodnoty.

Tedy po integraci jednotlivých sčítanců dostáváme $\boldsymbol{I = \frac{7}{2}\ln(|x-4|) - \frac{5}{2}\ln(|x-3|) + c.}$

PŘÍKLAD Č. 4

ZADÁNÍ:

Rozložte na parciální zlomky $\int \frac{6x-10}{4x^2+10x-6} dx$.

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu využijeme postupu jako u předešlých příkladů.

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme $\int \frac{2}{x+3} - \frac{1}{2x-1} dx$, který pokud integrujeme jednotlivé sčítance podle tabulky základních primitivních funkcí, dostaneme $\boldsymbol{I = 2\ln(|x+3|) - \frac{1}{2}\ln(|2x-1|) + c}$

PŘÍKLAD Č. 5

ZADÁNÍ:

Jako poslední příklad si uvedeme rozložení tohoto integrálu na parciální zlomky, zadání integrálu je $\int \frac{2x^2-8x+4}{2x^3-6x^2+4x} dx$.

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu vidíme polynom třetího stupně, proto musíme vytknout proměnnou x a poté nám zbude pouze kvadratická rovnice, kterou již umíme řešit.

Rozklad na parciální zlomky bude roven:

$$I = \int \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

Když tento integrál vypočteme, dostaneme výsledek:

$$\boldsymbol{I = ln|x| + ln|x-1| - ln|x-2| + c}$$

3.1.16 INTEGRACE FUNKCÍ, JEJICHŽ INTEGRACI MŮŽEME PŘEVÉST NA INTEGRACI RACIONÁLNĚ LOMENÉ FUNKCE (RLF)

1. $\int R(ln\ x)\cdot\frac{1}{x}dx = \begin{vmatrix} t = lnx \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{vmatrix} = \int R(t)dt$

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál pomocí výše uvedené integrace $\int \frac{ln^2x-1}{lnx+1}.\frac{1}{x}dx$.

ŘEŠENÍ:

Zavedeme si substituci:

$$\boldsymbol{u = lnx}$$

$$\boldsymbol{du = \frac{dx}{x}}$$

Poté můžeme dále integrovat $\int \frac{u^2-1}{u+1}.\frac{1}{x}x.du = \int \frac{(u+1)(u-1)}{(u+1)}du = \int u - 1\ du = \frac{(u-1)^2}{2}du = \boldsymbol{\frac{ln^2x}{2} - lnx + \frac{1}{2} + c}$

Jak vidíme z výše uvedeného postupu, v tomto příkladu využíváme toho, že proměnná x se nám vykrátí, zbude nám pouze výraz $u-1$, což s pomocí tabulkových integrálů umíme snadno řešit, potom již pouze dosadíme zpětně substituci.

2. $\int R(e^{ax})dx = \left| \begin{matrix} e^{ax} = t \\ e^{ax} \cdot a \cdot dx = dt \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{dt}{t} = dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \cdot \int R(t) \cdot \frac{1}{t} dt$

V této definici vidíme, že výsledný integrál již umíme lehce pomocí tabulkové integrace integrovat, v tomto případě ještě budeme vytýkat konstantu v integrálu před něj. Provedením substituce dostane integrál z racionální funkce proměnné t. (Hora)

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

$$\int \frac{e^{2x}}{1 - 3e^{2x}} dx$$

ŘEŠENÍ:

Podle dané definice vyřešíme integrál, jako substituci si zvolíme

$$1 - 3e^{2x} = u$$

$$du = -6e^{2x} dx$$

Tuto substituci si volíme proto, abychom odstranili výraz ve jmenovateli.

Pak si již můžeme vytknout konstantu před integrál a pracovat podle postupu, který jsme si výše uvedli.

$$-\frac{1}{6} . \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{6} . ln|1 - 3e^{2x}| + c$$

Důležité je opět nezapomenout na absolutní hodnotu u přirozeného logaritmu.

3. $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}$ $\qquad ax, a \neq 0$

Tento integrál má 3 způsoby řešení a to pomocí Eulerových substitucí.

Tyto substituce si zde demonstrujeme.

1. Eulerova substituce

Tato substituce je použitelná pro $a > 0$, její definice zní $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}x$.

2. Eulerova substituce

Tato substituce je použitelná pro $c > 0$, její definice zní $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{c}x$.

3. Eulerova substituce

Tuto substituci použijeme, pokud má kvadratická rovnice dva reálné kořeny, tj. pokud je kvadratická rovnice rozložitelná podle vzorce $r, s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \to \sqrt{ax^2 + bx + c} = a \cdot (x - r) \cdot (x - s)$, pak využijeme substituci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \cdot (x - r)$.

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

Podle uvedených definic vypočti: $\int \sqrt{x^2 + x + 2}dx$

ŘEŠENÍ:

Tento integrál si rozložíme na $\int \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}dx = \int \sqrt{u^2 + \frac{7}{4}}du$

Nejprve jsme si rozložili kvadratickou rovnici pomocí doplnění na čtverec.

V tomto příkladu využíváme Eulerovi substituce, která má tvar:

$\sqrt{u^2 + c} = u + t,$

kde c je konstanta.

Podle výše uvedené substituce můžeme dosadit:

$$\sqrt{u^2 + \frac{7}{4}} = u + t$$

Celou výše uvedenou řádku si umocníme druhou mocninou.

$$u^2 + \frac{7}{4} = u^2 + 2ut + t^2$$

Poté si určíme substituci a to následujícím způsobem:

$$2ut = \frac{7}{4} - t^2, u = \frac{\frac{7}{4} - t^2}{2t}, du = \frac{-t^2 - \frac{7}{4}}{2t^2} dt$$

$$\int \frac{7}{4} + u^2 du$$

$$= \int \frac{\frac{7}{4} + t^2}{2t} \cdot \frac{-\frac{7}{4} - t^2}{2t^2} dt$$

$$= -\int \frac{(t^2 + \frac{7}{4})^2}{4t^2} dt$$

$$= -\int \left(\frac{t}{4} + \frac{7t}{8} + \frac{49}{64} t^3\right) dt$$

$$= -\frac{t^2}{8} - \frac{7}{8} ln|t| - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 + \frac{7}{4}}{2t} \cdot \frac{t^2 - \frac{7}{4}}{2t} + c$$

$$= -\frac{7}{8} . \ln(\sqrt{u^2 + \frac{7}{4} - u} + \frac{1}{2} . u . \sqrt{u^2 + \frac{7}{4}} + c$$

Substituce:

$$u = x + \frac{1}{2}$$

Pak tedy:

$$\int \sqrt{\boldsymbol{x^2 + x + 2}} \boldsymbol{dx} = -\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{8}} . \mathbf{ln}(\sqrt{\boldsymbol{x^2 + x + 2}} \text{-}(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}))$$

V tomto výsledku je jasně vidět, že u přirozeného logaritmu není zapotřebí absolutní hodnota, výraz bude větší než nula.

Nyní si povíme něco k definicím, které jsou níže uvedené. Budeme je používat při řešení kvadratických rovnic, záleží však na tom, zdali půjdou rovnou rozložit, nebo bude zapotřebí doplnění na čtverec a jakých hodnot budou nabývat koeficienty kvadratického trojčlenu.

- $a > 0: \sqrt{a} \cdot \int \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right) + m} \; dx = \begin{vmatrix} x + \frac{b}{2a} = u \\ ax = du \end{vmatrix} = \sqrt{a} \cdot \int \sqrt{u^2 + m} \; du$

- $a < 0: \sqrt{-a} \cdot \int \sqrt{-\left(x + \frac{b}{2a}\right) - m} \; dx = |\uparrow n = -n| = -\sqrt{a} \cdot \int \sqrt{n - u^2} \, du$

Dalším typem RLF je tento integrál

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Zde si uvádíme dvě možné řešené, opět záleží na tom jaké hodnoty je člen a.

- $a > 0: \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \int \frac{du}{\sqrt{u^2+m}}$
- $a < 0: \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \int \frac{du}{\sqrt{n-u^2}}$

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

Podle výše uvedené definice vypočtěte $\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+16x-15}}$

ŘEŠENÍ:

V zadání máme ukrytý vzorec $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + c$, poté upravíme proměnnou pod odmocninou, z toho nám vyplívá $-4x^2 + 16x - 15 = 1 - (4x^2 - 16x + 16) = 1 - (2x - 4)^2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x-4)^2 dx}}$$

Zvolíme substituci:

$$z = 2x - 4$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 \to dx = \frac{dz}{2}$$

$$\frac{1}{2} . \int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz = \frac{1}{2} . arcsinz + c$$

Jak je vidět, můžeme si konstantu vytknout před integrál a dále pokračovat pouze v řešení tabulkového integrálu, který již umíme z předchozích kapitol řešit.

Zpětná substituce:

$$\frac{1}{2} . \int \frac{1}{\sqrt{-4x^2 + 16x - 15}} dx = \frac{1}{2} . \arcsin(2x - 4) + c$$

Další významnou racionálně lomenou funkcí jsou goniometrické funkce, můžeme je rozdělit na čtyři skupiny. A to tak, že první z nich je univerzální substituce.

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

a)univerzální substituce: $tg\,\frac{x}{2} = t$

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný příklad $\int \frac{dx}{5-3cosx}$pomocí výše uvedené substituce, tj. univerzální substitucí.

Substituce $tg\,x$ funguje pro jakékoliv racionálně lomené funkce v proměnných $sinx, cosx$ avšak její nevýhodou je složitost, proto můžeme v některých případech tuto substituci obejít. Nejprve si ji však budeme demonstrovat.

ŘEŠENÍ:

Výše jsme si uvedli substituci, kterou v tomto příkladu využijeme, tj. $tg\,\frac{x}{2} = t, x = 2.arctgt, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$

Dostaneme tedy: $tg\,\frac{x}{2} = t \rightarrow \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5-3.\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt$,upravíme zlomky $\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2-3+3t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{8t^2+2}dt$ celý výraz vydělíme-li dvěma, dostaneme $\int \frac{1}{4t^2+1}dt$.

Zvolíme další substituci:

$$2t = u$$

$$dt = \frac{1}{2}du,$$

Z čehož vyplývá $\int \frac{1}{4t^2+1}dt = \frac{1}{2}.\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}.arctg\,u + c = \frac{1}{2}.arctg(2t) + c,$ po vrácení zpětné substituce nám výsledný integrál vyjde $\int \frac{dx}{5-3cosx} = \frac{1}{2}.arctg\left(2tg\,\frac{x}{2}\right) + c.$

b)$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \rightarrow \sin x = t$

Pokud je funkce lichá v $cosx$ zjistíme, pokud vytkneme znaménko – před $cosx$, dostaneme ho před celý výraz.

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál, který má předpis $\int \frac{1}{cosx} dx$.

ŘEŠENÍ:

Zjistili jsme, že funkce je lichá v $cosx$, proto použijeme následnou substituci.

SUBSTITUCE:

$$sinx = t$$

$$cosxdx = dt$$

Dosadíme substituci zpět d integrálu a řešíme podle daných pravidel

$$\int \frac{cosxdx}{1 - sin^2x}$$

Rozložením na parciální zlomky podle návodu v kapitole rozklad na parciální zlomky, dostaneme

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

Můžeme ještě vytknout konstantu před integrál a po-té bude integrál

$$I = \frac{1}{2}.\int \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}.\int \frac{dt}{1+t}$$

Zpětným dosazením substituce nám vyjde výsledek

$$I = -\frac{1}{2}ln|1-t| + \frac{1}{2}ln|1+t| + c == -\frac{1}{2}ln|1-sinx| + \frac{1}{2}ln|1+sinx| + c$$

Opět nesmíme zapomenout na absolutní hodnotu u přirozených logaritmů.

c)$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x\ ) \rightarrow \cos x = t$

PŘÍKLAD:

Pokud je funkce lichá v $sinx$ zjistíme, pokud vytkneme znaménko – před $sinx$, dostaneme ho před celý výraz.

ZADÁNÍ:

Vyřešte daný integrál $\int \frac{dx}{(2+cosx).sinx}$l, který má funkci lichou v $sinx$.

ŘEŠENÍ:

$$\int \frac{sinxdx}{(2+cosx).(1-cosx)} = -\int \frac{dt}{(2+t).(1-t^2)} = rozklad\ na\ parciální\ zlomky$$

SUBSTITUCE:

$$cosx = t$$

$$-sinxdx = dt$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{1}{(t+2).(t+1).(t-1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t-1}, dostaneme\ A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{6}$$

Dosadíme a dostaneme

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3} ln|t+2| - \frac{1}{2} ln|t+1| + \frac{1}{6} ln|t-1|$$

Vrácením substituce $t = cosx$

I=$\frac{1}{3} ln|cosx + 2| - \frac{1}{2} ln|cosx + 1| + \frac{1}{6} ln|cosx - 1| + c$

d)$R(-sinx, -cosx) = R - (sinx, cosx) \rightarrow tgx = t$

PŘÍKLAD:

ZADÁNÍ:

$$\int \frac{\sin x}{sin^3 x + cos^3 x} dx$$

ŘEŠENÍ:

Pokud je funkce lichá v $sinx\ i\ cosx$ zjistíme, pokud vytkneme znaménko – před $sinx\ i\ \cos x$, dostaneme ho před celý výraz.

$$\int \frac{\sin x}{sin^3x + cos^3x}dx = \int \frac{tg\,x\,.\frac{1}{cos^2x}}{tg^3x+1}dx$$

$$= \int \frac{t}{t^3+1}dt = \int \frac{t}{(t+1).(t^2-t+1)}dt$$

Zde volíme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{t}{(t+1).(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

$$t = A(t^2-t+1) + (Bt+C).(t+1)$$

$$t = -1: -1 = 3\,A, A = -\frac{1}{3}$$

$$t^2: A + B = 0, B = \frac{1}{3}$$

$$t^1: A + C = 0, C = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{t}{(t+1).(t^2-t+1)}dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1|$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

Zbude nám zde ještě integrál, který dořešíme opět pomocí vhodné substituce. Nejprve si však kvadratickou rovnici doplníme na čtverec, abychom mohli správně substituovat.

$$\int \frac{dt}{t^2 - t + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \int \frac{du}{u^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} dv}{\frac{3}{4}(v^2 + 1)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\ v + c$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\ \left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ arctg\ \left(\frac{2t - 1}{\sqrt{3}}\right) + c\ .$$

Je tedy $\int \frac{t}{t^3+1} dt = -\frac{1}{3}\ln|t + 1| + \frac{1}{6}\ln(t^2 - t + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} arc\ tg\ \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c,$

čili $\int \frac{\sin x}{sin^3x + cos^3x} dx = \frac{1}{6}\ln\frac{(tg^2x - tg\ x + 1)}{(tg\ x + 1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} arctg\ \left(\frac{2\ tg\ x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c.$

4 URČITÝ INTEGRÁL

4.1.1 REIMANNOVA DEFINICE URČITÉHO INTEGRÁLU

DEFINICE:

- Infimum množiny všech horních (částí)součtů funkce f je v uzavřeném intervalu $< a, b >$.
- Nazýváme ho pak tedy horní Reimannův integrál funkce f od a do b.
- Značíme:

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

- Supremum množiny všech dolních součtů funkce f je v uzavřeném intervalu $< a, b >$.
- Nazýváme dolní Reimannův integrál funkce f od a do b.
- A značíme:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$$

- Je-li dolní integrál roven hornímu integrálu, potom společnou hodnotu nazýváme Reimannův integrál funkce f $v\ < a, b >$.
- Značíme:

$$(R)\int_{a}^{b} f(x)dx$$

4.1.2 NEWTONOVA DEFINICE URČITÉHO INTEGRÁLU

Newtonova definice určitého integrálu má úzkou souvislost s Reimannovým integrálem.

DEFINICE:

- Nechť funkce f je definovaná v intervalu (a, b), pak:
- Definice Newtonova integrálu:
- Jestliže je funkce $f(x)$:
    - Spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$
    - A funkce $F(x)$ je k ní na $\langle a, b\rangle$ primitivní, pak musí platit:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

→musíme ještě definovat obecný Newtonův integrál, který platí, pokud nastane případ nespojitosti primitivní funkce v krajních bodech definovaný rozdílem jednostranných krajních limit.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

Vlastnosti Newtonova a Reimannova integrálu

1. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

   Přehozením mezí dochází k vytknutí znaménka před integrál.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

   Pokud se rovnají dolní a horní mez, pak je integrál roven 0.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad , c \in (a, b)$

4. $\int_a^b \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \qquad \alpha \in R$

Pokud se v integrálu objeví konstanta, pak je možné tuto konstantu vytknout před integrál.

5. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad f, g \rightarrow spojité$

Pokud jsou funkce f a g spojité, můžeme rozdělit integrál s jejich součtem na dva integrály, které sčítáme.

Funkce, která je newtonovsky integrovatelná, ale ne reimanovsky:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , x \in (0, 1)}$$

- $lim_{x\rightarrow 1-} = +\infty \rightarrow \nexists \ (R) \int_0^1 f(x)dx$
- $F(x) = arc \sin x$

$$\left.\begin{matrix} \lim_{x\rightarrow 0^+} \arcsin x = 0 \\ \lim_{x\rightarrow 1-} \arcsin x = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \zeta\ (r) \int_0^1 f(x)dx = [\arcsin x]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Funkce, která je reimanovsky integrovatelná, ale ne newtonovsky

$$\boldsymbol{f_R(x) = \begin{matrix} \rightarrow 0, pro\ x \in R \\ \rightarrow 1, pro\ x = \frac{p}{g}, D(p, g) = 1 \end{matrix}}$$

Poznámka:

Každá spojitá funkce je reimanovsky i newtonovsky integrovatelná.

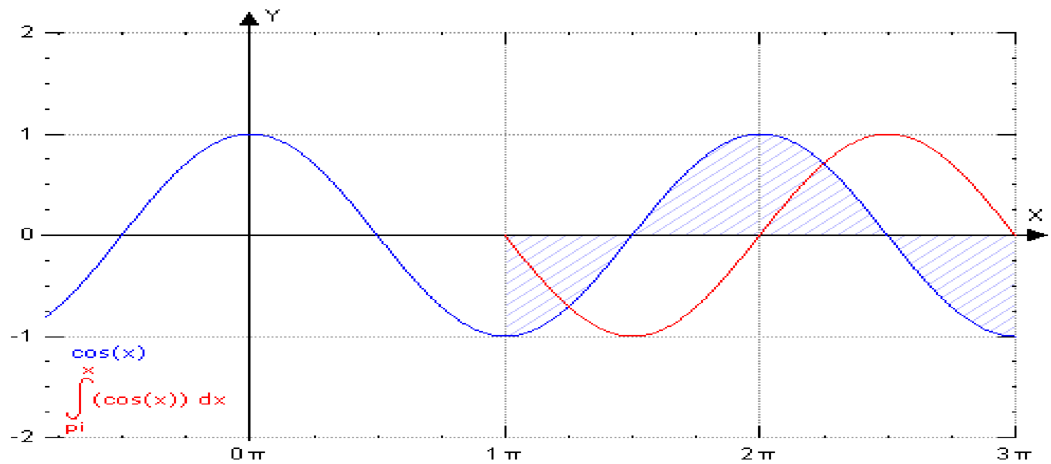
4.1.3 URČITÝ INTEGRÁL

Určitý integrál je obsah plochy, která je mezi osou x a křivkou funkce. Červená křivka ukazuje hodnou určitého integrálu, modrá je křivka funkce.

Jestliže se obsah plochy nad osou x rovná úseku plochy pod osou x, pak je hodnota určitého integrálu rovna 0.

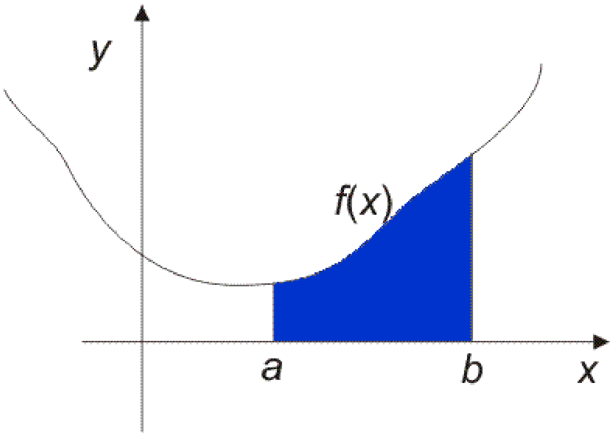
Tuto hodnotu můžeme zjistit:

- Analyticky
- Numericky



ZOBRAZENÍ URČITÉHO INTEGRÁLU

Obrázek č. 2



ZOBRAZENÍ PLOCHY VYMEZENÉ URČITÝM INTEGRÁLEM

Obrázek č. 3

4.1.4 VÝPOČET URČITÉHO INTEGRÁLU

Jako názorný příklad si uvedeme výpočet jednoduchého tabulkového integrálu, zadání integrálu je takové $\int_1^2 x + 1\,dx$, tento integrál vypočteme $I = \frac{x^2}{2} + x$, nyní dosadíme meze, které nám určuje integrál: $\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2$, což znamená, že pro každou mez i hodní i dolní vypočteme hodnotu daného výrazu dosazením dané meze za neznámou x.

$$F(2) = \left[\frac{4}{2} + 2\right] = 4$$

$$F(1) = \left[\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{3}{2}$$

Celková hodnota určitého integrálu I bude rovna rozdílu horní meze a dolní meze, tj. $4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

4.1.5 PŘÍKLADY VÝPOČTU URČITÉHO INTEGRÁLU

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

$$\int_2^4 4x^3 + 2x^2 + 1\ dx$$

ŘEŠENÍ:

Integrujeme jednotlivé sčítance podle tabulky primitivních funkcí, poté vyřešíme, a dosadíme horní a dolní mez určitého integrálu dle zadání, odečteme výsledek horní meze od dolní meze.

$$I = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x$$

Dosazení mezí:

$$\left[x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_2^4 = \mathbf{\frac{838}{3}}$$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

$$\int_{-5}^{4} 6x^2 + 1\,dx$$

ŘEŠENÍ:

Budeme postupovat jako v předešlém příkladu, vyřešíme tedy integrál dle tabulky základních primitivních funkcí, vyjde nám $I = 2x^3 + x$, dosadíme meze $[2x^3 + x]_{-5}^{4}$, po vypočtení jednotlivých mezí, vyjde určitý integrál $[2x^3 + x]_{-5}^{4} = 387$.

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Vypočtěte určitý integrál:

$$\int_{1}^{2} x + 1\, dx$$

ŘEŠENÍ:

$$\int_{1}^{2} (\boldsymbol{x} + \mathbf{1})\boldsymbol{dx} = \left[\frac{\mathbf{2^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}\right] - \left[\frac{\mathbf{1^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}\right] = \left[\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\right] - \left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right] = \mathbf{4} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{8-3}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

Řešením příkladu je tedy postup, který uvádím o řádku výše.

PŘÍKLAD Č. 4

ZADÁNÍ:

$$\int_{-2}^{1} (3x^2 + \sqrt{x})dx$$

ŘEŠENÍ:

Integrujeme jednotlivé sčítance podle daných pravidel, které jsme si uvedli v předešlých kapitolách, poté vyřešíme integrál a dosadíme horní a dolní mez určitého integrálu dle zadání. Meze od sebe odečteme a vhodně vyjádříme výsledek.

$$\int_{1}^{3x} \left|3x^2 + \sqrt{x}\right| dx = \left[x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = 2\sqrt{3} + \frac{76}{3}$$

$$= \left[2\sqrt{3} + 27\right] - \left[\frac{5}{3}\right] = 2\sqrt{3} + \frac{76}{3}$$

4.1.6 PER PARTES PRO URČITÝ INTEGRÁL

Postupujeme, stejně jako u neurčitého integrálu pouze dosazujeme meze.

PŘÍKLAD Č. 1

$$\int_{-1}^{1} x.arctg\ x\ dx \quad => použijeme\ metodu\ Per\ Partes$$

$$u = arctgx \quad u' = \frac{1}{x^2 + 1}$$
$$v = \frac{1}{2}x^2 \qquad v' = x$$

$I = \frac{1}{2}x^2 arctg\ x - \int \frac{x^2}{2x^2+2} dx$

Dále upravíme na rozklad na parciální zlomky. Z čehož dostaneme

$$I = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1} dx$$

Poté nám celkový výsledek vyjde:

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x$$

Na dosazené horní a dolní meze nám vyjde výsledek

$$\left[\frac{1}{2}x^2 arctg\ x + \frac{1}{2}\ arctg\ x - \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\pi - 1$$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

$$\int_0^3 x \cdot e^{2x} dx$$

ŘEŠENÍ:

$$u = x \qquad u' = 1$$

$$v' = e^{2x} \qquad v = \frac{1}{2}e^2x$$

$$I_1 = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

Poté použijeme substituci $2x = t$ a integrál dokončíme, vyjde nám

$$I = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

A řešením bude tedy: $\int_0^3 xe^{2x}dx = \boldsymbol{\frac{5}{4}e^6 + \frac{1}{4}}$

4.1.7 SUBSTITUČNÍ METODA PRO URČITÝ INTEGRÁL

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-4x}}\,dx$$

ŘEŠENÍ:

- Pomocí substituce, kterou si zavedeme, vyřešíme integrál

$$5-4x=t^2$$

$$-4dx=2tdt$$

$$t=\sqrt{5-4x}$$

$$5t^2=4x \rightarrow \frac{5-t^2}{4}=x$$

-vyjde nám $\int \frac{1}{4}.(t^2-5)\,dt,\ I=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3}t^3-5t\right)$, vrátíme-li zpět substituci, tj. $t=\sqrt{5-4x}$, pak dostaneme $I=\frac{1}{4}.(5-4x)^{\frac{3}{2}}-5.\sqrt{5-4x}$

-po dosazení mezí určitého integrálu dostaneme:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-4x}}\,dx=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

5 APLIKACE INTEGRÁLU V GEOMETRII

5.1.1 ZÁKLADNÍ OBRAZEC

1. **Základní obrazec**

DEFINICE:

Mějme dány úsečky AB a oblouk z bodu C do bodu D a křivky k splňující tyto podmínky:

a. Oblouk CD leží v jedné z polorovin vyťatých přímkou AB, přičemž tento oblouk má s přímkou AB společný nejvýše konečný počet prvků (bodů).

b. Každá kolmice k přímce AB má buďto jeden společný bod X s úsečkou AB a jeden společný bod Y s křivkou k nebo nemá společný bod s žádnou z těchto množin.

Potom se množina všech XY nazývá ZÁKLADNÍ OBRAZEC.

DEFINICE:

Obrazcem rozumíme G bodů v rovině, která je:

a. Sjednocením konečného počtu základních obrazců, přičemž libovolné Z z nich mají společné nejvýše body obvodu.

b. Existuje konečný počet základních obrazců, takových, že sjednocením $G \cup Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \ldots \cup Z_k$ je obrazcem takovým podle definice a.

5.1.2 OBSAH ZÁKLADNÍHO OBRAZCE

VĚTA Č. 1.

Obsah P základního obrazce G je dán trojicí $[a, b, f(x)]$ a je dán vzorcem $S = \int_a^b f(x)dx$.

VĚTA Č. 2.

Obsah nekladné funkce

Pokud je funkce nekladná, určíme její obsah oblasti se záporným znaménkem.

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx$$

VĚTA Č. 3.

Množinový rozdíl základního obrazce funkce g a funkce f.

Pokud na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle\ platí\ g(x) \leq f(x)$, pak oblasti ležící mezi grafy funkcí g a f je roven:

Pokud funkce f střídá znaménka, utvoříme vzorec $\int = \int_a^b f(x)dx$ rozdíl součtů obsahů oblastí určitých funkcí f ležících nad osou x a součtu obsahů ležících pod osou x.

$$S = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

5.1.3 OBSAH PLOCHY – PŘÍKLADY

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Vypočtěte obsah základního obrazce funkce $g(x) = \cos x$ na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

ŘEŠENÍ:

Nejprve určíme primitivní funkci, dostaneme podle tabulkové metody, poté dosadíme meze z intervalu $\langle a, b \rangle$ a dopočteme.

$$S = \int_a^b g(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Vypočtěte obsah základního obrazce funkce $f(x) = x^3 + 1$ na intervalu $\langle 1,3 \rangle$.

ŘEŠENÍ:

Abychom docílili výsledku obsahu plochy funkce, kterou máme v zadání na intervalu ⟨1,3⟩, musíme postupovat následujícím postupem.

Za prvé si vypočteme integrál, v tomto příkladu využijeme pouze tabulkové metody.

Za druhé dosadíme meze, od výsledku horní meze odečteme dolní mez a máme výsledek obsahu plochy.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^3 \mathrm{x}^3 + 1 \; dx = \left[\frac{x^4}{4} + x\right]_1^3 = 22$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Vypočtěte obsah základního obrazce funkce $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$ na intervalu $\langle -2, 4 \rangle$.

ŘEŠENÍ:

V tomto příkladu opět využíváme pouze tabulkové metody a dosazení mezí.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{-2}^4 4x^2 + 3x + 1 \, dx = \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_{-2}^4 = 120$$

PŘÍKLAD Č. 4

ZADÁNÍ:

Urči obsah plochy vymezené $f(x) = (cosx - 3x)$ v intervalu $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \rangle$.

ŘEŠENÍ:

Využijeme toho, že $\int cosxdx = sinx$ a $\int 3xdx = \frac{3}{2}x^2$, dosazením mezí do výsledků a rozdílu horní meze a dolní meze dostaneme požadovaný výsledek.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} cosx - 3x\, dx = \left[sinx - \frac{3}{2}x^2\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{\pi^2}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

5.1.4 DÉLKA KŘIVKY

DEFINICE:

Pokud máme křivku danou grafem funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže má funkce f spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$, pak délka křivky je dána vztahem:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

5.1.5 PŘÍKLADY NA VÝPOČET DÉLKY KŘIVKY

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Vypočtěte délku oblouku daného $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ v $\langle 1,0\rangle$

ŘEŠENÍ:

$$L = \int_0^1 \sqrt{(f'(x))^2 + 1}$$

Nejprve si vyřešíme derivaci funkce $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$$

Poté si derivaci umocníme druhou mocninou.

$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2}$$

K výsledku přičteme konstantu 1.

$$(f'(x))^2 + 1 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} + 1 = \left(\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}\right)^2$$

Posledním krokem je vyřešení integrálu a dosazením mezí, opět odečteme výsledek horní meze a dolní meze a vyjde nám délka křivky.

$$L = \int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{e}} \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1})$$

K přehození mezí došlo substitucí a to tím, že jsme si určili $e^0 \to 1, e^1 \to 1$.

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Vypočtěte délku oblouku daného $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}\,.\,(x-3)$ omezený průsečíky s osou x.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si určíme průsečíky, ty budou $x = 0, x = 3$ ty nám určí interval, ve kterém budeme počítat určitý integrál. Nyní už můžeme začít počítat derivaci:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Opět si danou derivaci umocníme druhou mocninou a poté přičteme konstantu 1.

$$(f'(x))^2 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}$$

$$(f'(x))^2 + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} + 1 = (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^2$$

Zde již dopočítáme určitý integrál podle předchozích kapitol a určíme délku křivky.

$$L = \int_0^3 (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^2 \, dx = 2\sqrt{3}$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Vypočtěte délku křivky danou $y = \sqrt{x - x^2} + arcsin\sqrt{x}$, kde

$x > 0$ a jeho definiční obor je na $\langle 0,1 \rangle$.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si musíme určit interval, ve kterém budeme počítat délku křivky.

Bude to v intervalu takovém, když vypočteme nerovnici $x - x^2 \geq 0$

tj. $x = 0, x = 1$. Po – té již pokračujeme dle postupu řešení délky křivky.

$$f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{1-x}{x}$$

$$(f'(x))^2 + 1 = \frac{1-x}{x} + 1 = \frac{1}{x}$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}}\, dx = 2$$

5.1.6 ROTAČNÍ TĚLESO A OBJEM ROTAČNÍHO TĚLESA

DEFINICE:

Budiž G základní obrazec určený obloukem CD a úsečkou AB. Při rotaci obrazce G kolem přímky AB každý bod oblouku CD, který neleží na přímce AB, opíše kružnici. Množina všech bodů těchto kružnic a jejich vnitřků doplněné těmito body oblouku CD, které leží na přímce AB, se nazývá rotační těleso.

DEFINICE:

Nechť $f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$, potom objem rotačního tělesa vzniklého rotací základního obrazce $(a, b, f(x))$ je:

$$V = \pi . \int_a^b f^2(x)\, dx$$

5.1.7 PŘÍKLADY NA VÝPOČET OBJEMU ROTAČNÍHO TĚLESA

PŘÍKLAD Č. 1

ZADÁNÍ:

Vypočtěte objem tělesa, jež vznikne rotací obrazce omezeného křivkami:

$f: y = 2 - x^2$

$g: y = x^2$

ŘEŠENÍ:

1) Máme-li vypočítat objem rotačního tělesa, musíme si nejprve vypočítat průsečíky funkcí $f(x) a\ g(x)$.
2) Vyřešíme rovnici $f(x) = g(x)$, $2 - x^2 = x^2 \rightarrow x = \pm 1$, interval bude tedy uzavřený na $\langle -1, 1\rangle$.
3) V tomto intervalu platí: $f(x) \geq g(x)$.

4) Dále budeme postupovat tak, že si vypočteme druhé mocniny obou funkcí, kde $f^2(x) = 4, g^2(x) = 4x^2$, tyto dvě hodnoty odečteme v integrálu, tj. $\int (f^2(x) - g^2(x))dx = \int 4 - 4x^2\, dx$.
5) Dosadíme meze z intervalu $\langle -1,1\rangle$, vznikne nám určitý integrál, který řešíme podle návodu v předchozích kapitolách. Budeme mít tedy k řešení: $\int_{-1}^{1} 4 - 4x^2 dx$, výsledek vynásobíme π a dostaneme $\frac{16\pi}{3}$.

Objem tedy bude:

$$V = \pi . \int_{-1}^{1} \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx = \pi . \int_{-1}^{1} (4 - 4x^2)\, dx = \frac{16\pi}{3}$$

PŘÍKLAD Č. 2

ZADÁNÍ:

Určete objem rotačního tělesa vytvořeného rotací obrazce daného křivkami.

$f_1 \colon y = \frac{x^2}{4}, f_2 \colon y = \frac{3}{2} - x$

kolem osy x.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si určíme průsečíky os, abychom jako v předešlých případech dostali interval, pro který bude platit určitý integrál.

$f_1 \colon y = \frac{x^2}{4}, f_2 \colon y = \frac{3}{2} - x$

$f_1 = f_2$

Vypočtením kořenů kvadratické rovnice dostaneme dolní a horní mez určitého integrálu.

$x^2 + 4x - 6 = 0, x_1 = -2 + \sqrt{10}, x_2 = -2 - \sqrt{10}$

Poté již pouze odečteme umocněné funkce $(f_2)^2 - (f_1)^2$ a výsledek vynásobíme π a dostaneme požadovaná objem rotačního tělesa.

$$V = \pi . \int_{-2-\sqrt{10}}^{-2+\sqrt{10}} [(f_2)^2 - (f_1)^2] \, dx = 165{,}57$$

PŘÍKLAD Č. 3

ZADÁNÍ:

Určete objem rotačního tělesa daného $f(x) = tgx, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

ŘEŠENÍ:

Funkci $f(x) = tgx$ si můžeme rozložit jako $\frac{sinx}{cosx}$, musíme ji umocnit na druhou a poté tento integrál řešit s pomocí goniometrického vzorce $1 = sin^2x + cos^2x$.

$$f^2(x) = \frac{sin^2x}{cos^2x}$$

$$V = \pi . \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin^2x}{cos^2x} \, dx = \pi . \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - cos^2x}{cos^2x} dx = \pi . \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{cos^2x} - 1) dx = \frac{\pi}{4} . (4 - \pi)$$

5.1.8 POVRCH PLÁŠTĚ ROTAČNÍHO TĚLESA

DEFINICE:

Nechť je $f(x)$spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má na tomto intervalu spojitou derivaci. Povrch pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky, jež je grafem f kolem osy x , daný vztah je:

$$P = 2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

PŘÍKLAD Č. 1.

ZADÁNÍ:

Vypočítejte povrch plochy P, kterou sestrojí křivka $y = \sin x\,, x \in \langle 0, \pi\rangle$ kolem osy x.

ŘEŠENÍ:

$f'(x) = \cos x$

$(f'(x))^2 = cos^2x$

$1 + (f'(x))^2 = 1 + cos^2x$

$$P = 2\pi.\int_0^{\pi} f(x).\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = 2\pi.\int_0^{\pi} sinx.\sqrt{1+cos^2x}dx$$

SUBSTITUCE:

$$cosx = t$$

$$sinxdx = dt$$

$$cos0 = t \rightarrow t_1 = 1$$

$$cos\pi = t \rightarrow t_2 = -1$$

$= 2\pi . \int_{1}^{-1} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi . \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\ dt$, integrovatelná funkce je na uzavřeném intervalu $\langle -1,1 \rangle$, dále počítáme integrál takto:

$$2\pi . \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt = 2.2\pi . \int_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}dt \rightarrow = \int_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_{0}^{1} t . \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

METODA PER PARTES:

$$u = t \qquad u' = 1$$

$$v' = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad v = \sqrt{1+t^2}$$

Metodu per partes provedeme jako u předešlých příkladů.

$$= \left[ln\left[t + \sqrt{1+t^2} \right] \right]_0^1 + \left[t - \sqrt{1+t^2} \right]_0^1 - \int_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}dt$$

- Poté řešíme rovnici:

$$2. \int_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - ln1 + \sqrt{2}$$

$$2. \int_{0}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}$$

$$2.\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}.\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right)$$

$$\boldsymbol{P=4\pi.\int_{0}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt=4\pi.\frac{1}{2}.\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right)=2\pi.\left(ln\left|1+\sqrt{2}\right|+\sqrt{2}\right)}$$

6 UŽITÍ INTEGRÁLU VE FYZICE

Integrály využíváme nejen v matematice, ale i ve fyzice a to například k výpočtům:

- V kinematice
  - Dráha přímočarého pohybu konaného rychlostí $v = v\ (t)$ v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ je dána vztahem:
    - $s = \int_{t_1}^{t_2} v\ (t)dt$
- Pro výpočet síly
- Pro výpočet těžiště
  - $y_T = \dfrac{S_x}{S} = \dfrac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2} \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}, \qquad x_T = \dfrac{S_y}{S} = \dfrac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}.$
- Pro výpočet práce
  - Práce vykonaná na přímočaré dráze ve směru osy c silou velikosti $F(F(x))$ v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ je dána vztahem
    - $W = \int_a^b F(x)dx$
- Pro výpočet momentu setrvačnosti
  - U homogenního rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 0, x = a, x = b$ a $y = f(x)$ budeme určovat momenty setrvačnosti vůči souřadnicovým osám x a y. V souladu s výše uvedeným obecným vzorcem bude platit:

$$J_x = \rho \int_S r^2 \cdot dS = \rho \cdot \int_a^b \left[\frac{f(x)}{2} \right]^2 \cdot f(x) \cdot dx = \rho \cdot \int_a^b \frac{f^3(x)}{4} \cdot dx,$$

$$J_y = \rho \cdot \int_S r^2 \cdot dS = \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot dx.$$

7 ZÁVĚR

Ve své diplomové práci jsem se rozhodla laickému čtenáři přiblížit teorii a aplikaci integrálního počtu. Cílem mé diplomové práce je ukázat jak efektivně využívat možnosti integrálního počtu.

Pro jasnější výklad uvádím různé typy příkladů od elementárních po obtížnější. U každého příkladu mám připojený podrobný popis, jak správně postupovat při výpočtu i finální řešení příkladu.

Svou diplomovou práci jsem se rozhodla pojmout jako sbírku úloh pro studenty středních škol, s tématikou integrálního počtu. Mou diplomovou práci mohou využít i laici, kteří se zajímají o tuto problematiku. Dle mého názoru jsem látku podala srozumitelně, jednotlivé příklady jsou jasně definovány a přehledně uspořádány.

Doufám, že budoucí čtenář tuto strukturu ocení a bude pro něj stejným přínosem při studiu matematiky jako pro mne.

Svou práci jsem vypracovala samostatně, pouze s použitím přiložené literatury, využitím internetu a za odborného vedení Mgr. Lukáše Honzíka, kterému bych tímto chtěla velmi poděkovat za jeho rady a pomoc.

8 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1 byl převzat z http://math.feld.cvut.cz/mt/txtd/3/txc3da3a.htm

Název obrázku: Tabulka primitivních funkcí

Obrázek č. 2 byl převzat z www.aristoteles.cz

Název obrázku: Zobrazení určitého integrálu

Obrázek č. 3 byl převzat z www.aristoteles.cz

Název obrázku: Zobrazení plochy vymezené určitým integrálem

9 SEZNAM LITERATURY

1. SCHUHMEIER, Ing. Petr. Aristoteles. *Aristoteles* [online]. 2006. vyd. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: www.aristoteles.cz
2. HUSAR, Petr. E-matematika.cz. *E-matematika.cz* [online]. 1990. vyd. 1990 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: www.e-matematika.cz
3. SCHLESINGEROVÁ, Eva. *Integrální počet* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~xschlesi/dp/. Diplomová. Masarykova univerzita.
4. FSI VUT BRNO. *Matematika online* [online]. 2005. vyd. Brno, 2005 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/default.aspx
5. Cifrkova matematika: Neurčitý integrál. CIFRK C. *Cifrkova matematika* [online]. 2001. vyd. 2001, 2013 [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: http://www.matematika.webz.cz/analyza/?s=neurcity
6. PYRIH. *Sbírka příkladů z matematické analýzy* [online]. [cit. 2013-03-13]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pyrih/sbirka/
7. NOVÁKOVÁ, E., VACEK, M. Integrální počet. Praha: SNTL, 1984. 311 s.
8. JARNÍK, V. Integrální počet I. Praha: Academia, 1974. 243 s.
9. JARNÍK, V. Integrální počet II. Praha: SNTL, 1976. 763 s
10. Stary dobry Trial [online]. 2011. Dostupné z WWW: }http://trial.kma.zcu.cz/main.php\
11. TOMICZEK, P. Matematická analýza I [online]. Plzeň: ZČU, 2006. WWW: http://home.zcu.cz/ tomiczek/Data/SDPaMA1.pdf
12. TOMICZEK, P. Matematická analýza II [online]. Plzeň: ZČU, 2006. WWW: http://home.zcu.cz/ tomiczek/Data/MA2.pdf\
13. CALDA. *Sbírka řešených úloh: Středoškolská matematika pod mikroskopem*. Praha4: Prometheus,spol s. r. o., 2006. 1.vydání. ISBN 80-7196-319-4
14. HRUBÝ, Dag. *Matematická cvičení pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, c2008, 294 s. ISBN 978-807-1963-745.
15. POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 7. vyd. Praha: Prometheus, 1991, 608 s. ISBN 80-719-6196-5.

16. SCHWABIK, Štefan a Petra ŠARMANOVÁ. *Malý průvodce historií integrálu*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 95 s. Dějiny matematiky (Prometheus), sv. 6. ISBN 80-719-6038-1.

17. KUBÁT, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004, 608 s. ISBN 978-807-1962-984.

18. MUSILOVÁ, Jana. *Matematika I: pro porozumění a praxi : netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky*. Vyd. 1. Brno: VUTIUM, 2006, 281 s. ISBN 80-214-2914-3.

19. HORA, Jaroslav. *Matematická analýza: pomocný učební text pro studenty 1. ročníku*. 5., upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004, 115 s. ISBN 80-704-3298-5.

20. Přednášky z předmětu KMT/VKMA, rok studia 2010-2011, lektor RNDr. Jaroslav Hora, Csc., Mgr. Lukáš Honzík

10 RESUMÉ

In my thesis I decided to give a common reader an idea of theory and application of integral calculus. The aim of my thesis is to show how the integral calculus can be effectively and variously used.

Due to a clear interpretation I quote different examples - from elementary to complicated ones. Each example has a detailed description how to proceed in right calculations. There is also a final solution of examples.

My thesis is designed as a collection of integral calculus exercises for high school students. My thesis can be also used by common readers, who are interested in this area. In my opinion the curriculum is interpreted clearly and each example is sorted and defined transparently.

I hope that a future reader appreciates the concept of my thesis and it will be a contribution for readers who study mathematics as I do.

I wrote my thesis by myself with using of enclosed literature and under a professional lead of Mgr. Lukáš Honzík to whom I would like to thank.