

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky



DIPLOMOVÁ PRÁCE
Plochy ve světě kolem nás

LENKA BENEŠOVÁ

vedoucí diplomové práce RNDr. SVĚTLANA TOMICZKOVÁ, Ph.D.
Plzeň, 8. května 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Plochy ve světě kolem nás* vypracovala samostatně pod odborným vedením vedoucí diplomové práce RNDr. Světlany Tomiczkové, Ph.D. a s využitím zdrojů uvedených v seznamu použité literatury.

V Plzni dne 8. května 2013

.....

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí své diplomové práce, RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D., za odborné vedení, ochotu, věcné připomínky, trpělivost a veškerý čas, který mi věnovala.

Dále bych chtěla poděkovat rodině a přátelům za trpělivost a psychickou podporu během celého studia.

Klíčová slova

Učební materiál, plocha, rotační, šroubová, přímková, vektorové vyjádření, praxe, pracovní list, Geogebra

Abstrakt

Diplomová práce je zaměřena na popis vybraných rotačních, šroubových a přímkových ploch. Text je psán formou studijního materiálu, který by měl být využíván při výuce speciálního semináře z deskriptivní geometrie. Součástí práce jsou i pracovní listy, přiložené v elektronické podobě na CD. Konstrukce příkladů jsou z programu Geogebra. Práce je k dispozici i v podobě webových stránek, které jsou oproti textu obohaceny o modely vybraných ploch, historické poznámky a fotogalerie.

Keywords

Learning material, surface, rotary, screw, linear, vector expression, practice, worksheet, Geogebra

Abstract

This diploma thesis focuses on the description of selected rotary, screw and rectilinear surfaces. The text is written in the form of study material that should be used when teaching a special seminar in descriptive geometry. The thesis also includes worksheets provided in electronic form on CD. Construction examples are from the program Geogebra. Thesis is also available in the form of web pages that are enriched compared to the text of the models selected areas, historical notes and a photo gallery.

Obsah

Úvod	9
1 Základní pojmy	11
1.1 Výběr ploch	11
1.2 Rotační plochy	12
1.2.1 Obecné poznatky	12
1.2.2 Parametrizace rotačních ploch	13
1.3 Šroubové plochy	15
1.3.1 Obecné poznatky	15
1.3.2 Parametrizace šroubových ploch	15
1.4 Přímkové plochy	17
1.4.1 Obecné poznatky	17
1.4.2 Parametrizace konoidů	18
1.5 Pracovní listy	19
2 Vybrané rotační plochy	21
2.1 Kulová plocha	21
2.1.1 Zařazení plochy	21
2.1.2 Matematické odvození plochy	22
2.1.3 Praktické využití plochy	23
2.1.4 Pracovní list - kulová plocha	27
2.2 Anuloid	28
2.2.1 Zařazení plochy	28
2.2.2 Matematické odvození plochy	31
2.2.3 Praktické využití plochy	32
2.2.4 Pracovní list - anuloid	34
2.3 Jednodílný rotační hyperboloid	35
2.3.1 Zařazení plochy	35

2.3.2	Matematické odvození plochy	36
2.3.3	Praktické využití plochy	39
2.3.4	Pracovní list	41
2.4	Rotační paraboloid	42
2.4.1	Zařazení plochy	42
2.4.2	Matematické odvození plochy	42
2.4.3	Praktické využití plochy	43
2.4.4	Pracovní list	46
3	Vybrané šroubové plochy	48
3.1	Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha	48
3.1.1	Zařazení plochy	48
3.1.2	Matematické odvození plochy	49
3.1.3	Praktické využití plochy	51
3.1.4	Pracovní list	52
3.2	Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha	53
3.2.1	Zařazení plochy	53
3.2.2	Matematické odvození plochy	54
3.2.3	Praktické využití plochy	55
3.2.4	Pracovní list	57
3.3	Archimedova serpentina	58
3.3.1	Cyklické šroubové plochy	58
3.3.2	Matematické odvození plochy	59
3.3.3	Praktické využití plochy	60
3.3.4	Pracovní list	63
4	Vybrané zborčené plochy	64
4.1	Hyperbolický paraboloid	64
4.1.1	Zařazení plochy	64
4.1.2	Matematické odvození plochy	65
4.1.3	Praktické využití plochy	67
4.1.4	Pracovní list	69
4.2	Přímý parabolický konoid	70
4.2.1	Zařazení plochy	70
4.2.2	Matematické odvození plochy	70
4.2.3	Praktické využití plochy	72
4.2.4	Pracovní list	74

4.3	Přímý vlnový konoid	75
4.3.1	Zařazení a vznik plochy	75
4.3.2	Matematické odvození plochy	75
4.3.3	Praktické využití plochy	77
4.3.4	Pracovní list	79
5	Modely ploch	80
6	Ověření materiálu v praxi	82
	Závěr	84
	Literatura	86
	Seznam převzatých obrázků	88
	Přílohy	92

Úvod

Na střední škole je výuka deskriptivní geometrie věnována konstrukcím v Mongeově promítání, axonometrii a okrajově lineární perspektivě, případně kótovanému promítání. Velice málo se pak věnuje geometrickým plochám a jejich konstrukcím v rámci Mongeova promítání a axonometrie. Ve studijních plánech deskriptivní geometrie bychom našli především rotační válcovou plochu, rotační kuželovou plochu či kulovou plochu.

V následujícím textu jsou popsány další typy geometrických ploch, které by bylo možné přidat do výuky deskriptivní geometrie nebo speciálního semináře. Tyto semináře by byly určeny pro nadané žáky, které geometrie baví a chtějí se více dovědět o plochách technické praxe. Diplomová práce na téma *Plochy ve světě kolem nás* je psána ve formě učebního materiálu, který lze využívat při výuce seminářů z deskriptivní geometrie na středních školách.

První kapitola je věnována základním pojmům. Jedná se o uvedení do problematiky jednotlivých typů geometrických ploch spolu s principem odvozování jejich vektorového vyjádření. Vybrány jsou rotační, šroubové a přímkové plochy. V první kapitole jsou popsány i pracovní listy, které jsou součástí diplomové práce. Obsahují teoretické otázky a konstrukční úlohy, které pomáhají lépe pochopit nově vyloženou látku.

Další kapitoly jsou rozděleny podle typů geometrických ploch. U každé konkrétní plochy je uvedeno, jakým způsobem vzniká a mezi jaké plochy ji lze zařadit. Následuje matematické odvození plochy, které je rozšiřujícím učivem. Uvažujeme pouze rovinné případy tvořících křivek. Pro každou plochu je část textu věnována využití plochy v technické praxi. Ve 3D modelářích Google SketchUp a Rhino byly vytvořeny modely ploch inspirované právě příklady z praxe.

Část vytvořeného výukového materiálu byla vyzkoušena v praxi a poslední kapitola je věnována této ukázkové hodině. Je zde popsán průběh hodiny a výsledky dotazníkového šetření. Nejedná se o statisticky významné

výsledky, neboť při výuce byl přítomen malý vzorek studentů. Spíše se jedná o konkrétní názory žáků, které nám pomohly utvořit si představu o tom, zda je tento materiál vhodný pro výuku na středních školách.

K diplomové práci je přiloženo CD, na kterém je připravená i prezentace k ukázkové hodině. Dále obsahuje vytvořené webové stránky, které mají analogickou formu výukového materiálu jako text diplomové práce. Součástí jsou také konstrukční úlohy s řešením v programu Geogebra, ve kterém lze krokodvat postupy jednotlivých konstrukcí. Na webových stránkách jsou k dispozici i vytvořené modely k jednotlivým plochám.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Výběr ploch

Práce je zaměřena na využití geometrických ploch v praxi. Byl proveden výběr takových ploch, které lze zařadit do tematického plánu výuky deskriptivní geometrie na střední škole. Máme tím na mysli zařazení například do speciálního semináře jako rozšiřující učivo pro nadané žáky.

Proto předpokládáme, že dosavadní znalosti žáků z deskriptivní geometrie a matematiky dostačují k pochopení nové látky. Za dostačující znalosti z deskriptivní geometrie považujeme znalost základních konstrukcí Mongeova promítání a axonometrie. Z matematiky by měla být žákům známa analytická geometrie a goniometrické funkce.

V následujícím seznamu jsou plochy řazené tak, jak se jim budeme postupně v práci a pochopitelně i během výuky věnovat. V závorce je vždy uvedeno k jakým typům ploch lze plochu zařadit.

Seznam vybraných ploch:

1. **kulová plocha** (rotační cyklická)
2. **anuloid** (rotační cyklická)
3. **jednodílný rotační hyperboloid** (rotační, přímková zborcená)
4. **rotační paraboloid** (rotační)
5. **pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha** (přímková šroubová, přímková zborcená)

6. **kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha** (přímková šroubová)
7. **Archimédova serpentina** (cyklická šroubová)
8. **hyperbolický paraboloid** (přímková zborcená)
9. **přímý parabolický konoid** (přímková zborcená)
10. **přímý vlnový konoid** (přímková zborcená)

Jednotlivé typy jsou blíže specifikovány v následujících třech kapitolách. Shrnuli jsme v nich základní pojmy týkající se rotačních, šroubových a přímkových ploch. Zaměřili jsme se pouze na nejdůležitějších vlastnosti, které jsou dále využívány při výuce jednotlivých vybraných ploch. Podrobnější informace lze nalézt v publikacích uvedených v seznamu literatury. Čerpáno bylo především z [1], [2].

1.2 Rotační plochy

1.2.1 Obecné poznatky

Rotační plochu vytvoříme rotací křivky k tzv. *tvořící křivky* kolem přímky o , kterou nazýváme *osa rotačního pohybu*. Tvořící křivka neleží v rovině kolmé k ose rotace, ani s touto osou nesplývá. Plocha je souměrná podle osy rotačního pohybu. Pokud je tvořící křivkou rotační plochy kružnice, hovoříme o tzv. *cyklické rotační ploše*.

Vedeme-li řez rotační plochy rovinou procházející osou rotačního pohybu, nazýváme tento řez poledníkem rotační plochy neboli *meridiánem*. Pokud by navíc byla rovina řezu rovnoběžná s průmětnou, jedná se o *meridián hlavní*. Rovina každého meridiánu má tu vlastnost, že je podle ní plocha souměrná, neboť tato rovina prochází osou rotačního pohybu.

Budeme-li uvažovat bod X na tvořící křivce, která koná rotační pohyb, pak tento bod opisuje tzv. *rovnoběžkovou kružnici*, kterou budeme označovat r_X . Každý bod tvořící křivky se pohybuje po rovnoběžkové kružnici a tři z nich mají speciální označení tzv. *rovník, kráter a hrdlo*.

Pokud tečny meridiánu v bodech rovnoběžkové kružnice vytvoří rotační válcovou plochu a pokud je poloměr rovnoběžkové kružnice ze všech *sousedních* rovnoběžkových kružnic největší, nazýváme ji *rovník*. Pokud tečny

meridiánu v bodech rovnoběžkové kružnice opět tvoří rotační válcovou plochu, ale poloměr této rovnoběžkové kružnice je ze všech *sousedních* rovnoběžkových kružnic nejmenší, nazýváme ji *hrdlo*. Pokud tečny meridiánu v bodech rovnoběžkové kružnice leží v rovině, nazýváme tuto rovnoběžkovou kružnici *kráter*. Navíc můžeme rozlišovat i tzv. *hraniční* rovnoběžkové kružnice, které vytvoří koncové body tvořící křivky.

Tečná rovina τ rotační plochy je určena tečnami ke dvěma křivkám plochy v daném bodě. Nejčastěji budeme využívat kombinaci tečny meridiánu t_m a tečny rovnoběžkové kružnice t_r nebo tečny tvořící křivky t_k a tečny rovnoběžkové kružnice t_r . Platí, že tečná rovina je kolmá na rovinu meridiánu, která prochází daným bodem dotyku. Přímkou kolmou k tečné rovině a procházející daným bodem nazýváme *normálou* plochy a označujeme ji n .

1.2.2 Parametrizace rotačních ploch

Pro parametrizaci rotační plochy zvolíme jako tvořící křivku meridián m rotační plochy ležící v jedné ze souřadnicových rovin. Tato volba je pro naše odvozování výhodná, protože pak jedna ze souřadnic vektorového vyjádření tohoto meridiánu bude rovna nule. Dále je pro nás výhodné volit jako osu rotace jednu ze souřadnicových os.

My budeme u rotačních ploch volit meridián ležící v rovině yz a rotaci kolem osy z . Pokud bychom však zvolili jiný meridián a jinou osu rotačního pohybu, princip odvozování by byl analogický. Vektorové vyjádření zvoleného meridiánu v rovině yz je ve vztahu (1.1), kde $y(t)$, $z(t)$ jsou funkce parametru t , jehož hodnoty jsou z nějakého zvoleného intervalu I .

$$\mathbf{m}(t) = (0, y(t), z(t)) \quad (1.1)$$

Každý bod tohoto meridiánu při rotačním pohybu kolem osy z opisuje rovnoběžkovou kružnici. Mění se tedy jeho souřadnice x a y , kdežto souřadnice z zůstává nezměněna. Poloměr rovnoběžkové kružnice určuje souřadnice y ve vektorovém vyjádření meridiánu, tedy platí $R = |y(t)|$.

Všechny rovnoběžkové kružnice dohromady tedy tvoří rotační plochu. Vektorové vyjádření rotační plochy zapisujeme vztahem (1.2). Souřadnice x a y určují rovnoběžkovou kružnici a souřadnice z určuje v jaké výšce tato rovnoběžková kružnice leží. Parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\mathbf{P}(u, t) = (R \cos u, R \sin u, z(t)) \quad (1.2)$$

Pokud dosadíme za poloměr R , dostaneme konečné vektorové vyjádření rotační plochy (1.3).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = (|y(t)| \cos u, |y(t)| \sin u, z(t)) \quad (1.3)$$

Dalším způsobem odvození rotační plochy je využití geometrických transformací pomocí maticového zápisu. Tento postup uvádíme především pro žáky matematického semináře, kteří chápou operace s maticemi.

Rotační pohyb rovinné křivky kolem osy z o úhel α označujeme $R_z^{(\alpha)}$ a matice vyjadřující tuto transformaci má tvar, který je uveden ve vztahu (1.4). Úhel otočení α uvažujeme z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$R_z^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Meridián rotační plochy vyjádříme opět ve tvaru (1.5).

$$\mathbf{m}(\mathbf{t}) = (0, y(t), z(t)) \quad (1.5)$$

Výslednou rotační plochu vyjádříme vztahem (1.6) jako násobení vektoru meridiánu a transformační matice vyjadřující rotační pohyb.

$$\mathbf{P}(\alpha, \mathbf{t}) = \mathbf{m}(\mathbf{t}) \cdot R_z^{(\alpha)} \quad (1.6)$$

Po dosazení do (1.6) za meridián a matici rotace a po úpravě dostaneme vektorové vyjádření rotační plochy (1.7).

$$\mathbf{P}(\alpha, \mathbf{t}) = (-y(t) \sin \alpha, y(t) \cos \alpha, z(t)) \quad (1.7)$$

Na první pohled se zdá, že vztahy (1.3) a (1.7) jsou dva odlišné výsledky, ale ve skutečnosti jde o stejnou rotační plochu. Parametr u plní stejnou funkci, jako úhel otočení α . V obou vyjádření jsou jedním systémem křivek rovnoběžkové kružnice a druhým systémem polomeridiány rotační plochy, liší se pouze tím, že když dosadíme do obou vztahů stejné úhly, dostaneme dva různé body rotační plochy, ale výsledná plocha je stejná. Zkuste si sami dosadit do obou vztahů vždy stejnou dvojici úhlů a přesvědčete se o tom.

1.3 Šroubové plochy

1.3.1 Obecné poznatky

Šroubové plochy vznikají šroubovým pohybem křivky k , kterou opět nazýváme *tvořící křivkou*. Speciálně, pokud bude tvořící křivkou přímka, budeme mluvit o *přímkové šroubové ploše* a pokud bude tvořící křivkou kružnice, budeme o této ploše mluvit jako o *cyklické šroubové ploše*.

Šroubový pohyb je složením dvou elementárních pohybů, jsou jimi rotace kolem osy a posunutí ve směru osy. Šroubový pohyb obecně určujeme třemi prvky. Jsou jimi osa šroubového pohybu o , tzv. *redukovaná výška závitu*, kterou značíme v_0 a posledním prvkem je orientace šroubového pohybu. Pravootočivý směr značíme znaménkem (+) a levotočivý (−). Musíme však dávat pozor, protože co je geometricky levotočivé, to architekti a stavitelé nazývají pravotočivým.

Hodnota konstanty v_0 udává, o jakou výšku se posune bod X při otočení o úhel $\alpha = 1\text{rad} \doteq 57^\circ 17' 45''$. *Výškou jednoho závitu* nazýváme posunutí o výšku v při otočení o 2π radiánů.

Pokud je tvořící křivkou přímka, která prochází osou šroubového pohybu, budeme hovořit o tzv. *uzavřené přímkové šroubové ploše*. Naopak, pokud tvořící přímka nebude procházet osou šroubového pohybu, budeme hovořit o tzv. *otevřené přímkové šroubové ploše*.

Provedeme-li řez rovinou ρ , procházející osou šroubového pohybu, získáme tzv. *podélný profil* neboli *osový řez*. Pokud bude rovina ρ kolmá na osu o , pak získáme tzv. *příčný profil* neboli *čelní řez*.

Meridiánem šroubové plochy nazýváme osový řez příslušný k jednomu závitu šroubové plochy. Všechny body tvořící křivky se pohybují po trajektorii, kterou je v případě šroubových ploch šroubovice.

1.3.2 Parametrizace šroubových ploch

Jak bylo řečeno výše, meridián šroubových ploch je opět řez rovinou, která prochází osou šroubového pohybu. U šroubových ploch je meridiánem pouze část křivky, která přísluší jednomu závitu.

Stejně jako v kapitole (1.2) i tady pro nás bude výhodné volit meridián ležící v jedné ze souřadnicových rovin, aby byla jedna ze souřadnic vektorového vyjádření nulová.

Opět budeme volit meridián v rovině yz , který vyjádříme vztahem (1.8). Jednotlivé složky vektoru $y(t)$, $z(t)$ jsou, stejně jako u rotačních ploch, funkce parametru t , jehož hodnoty jsou z nějakého intervalu I .

$$\mathbf{m}(t) = (0, y(t), z(t)) \quad (1.8)$$

Dále víme, že šroubový pohyb je složen z rotace kolem osy o úhel α a posunutí o nějaký vektor ve směru osy šroubového pohybu. Proto i parametrické vyjádření šroubové plochy bude složením jednotlivých pohybů.

Když bod rotuje kolem osy o nějaký úhel, mění se souřadnice x a zároveň i souřadnice y . Při posouvání se mění souřadnice z o vektor posunutí. Proto budeme šroubovou plochu vyjadřovat ve tvaru (1.9). Parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\mathbf{P}(u, t) = (R \cos u, R \sin u, z(t) + v_0 u) \quad (1.9)$$

Poloměr kružnice při rotaci je, stejně jako rotačních ploch, souřadnice y vektorového vyjádření meridiánu $R = |y(t)|$. Pokud opět dosadíme do vztahu (1.9) za poloměr dostaneme konečné vektorové vyjádření šroubové plochy ve tvaru (1.10).

$$\mathbf{P}(u, t) = (|y(t)| \cos u, |y(t)| \sin u, z(t) + v_0 u) \quad (1.10)$$

Také pro vyjádření šroubové plochy můžeme využít maticového počtu. Transformační matici vyjadřující rotaci kolem osy z o úhel α je dána tvarem (1.11), kde úhel α je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$R_z^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Pro meridián šroubové plochy opět využijeme tvar (1.12).

$$\mathbf{m}(t) = (0, y(t), z(t)) \quad (1.12)$$

Vztahem (1.13) vyjadřujeme vektor posunutí, o který se daný bod posune při otočení o úhel α .

$$\mathbf{T}(\alpha) = (0, 0, v_0 \alpha) \quad (1.13)$$

Pravotočivou šroubovou plochu vyjádříme vztahem (1.14) a levotočivou šroubovou plochu vztahem (1.15).

$$\mathbf{P}(\alpha, t) = \mathbf{m}(t) \cdot R_z^{(\alpha)} + \mathbf{T}(\alpha) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{P}(\alpha, t) = \mathbf{m}(t) \cdot R_z^{(\alpha)} - \mathbf{T}(\alpha) \quad (1.15)$$

Pokud dosadíme do vztahů (1.14) a (1.15) za meridián, matici rotace a vektor posunutí získáme po úpravě konečné vektorové vyjádření. Pro pravotočivou šroubovou plochu vztah (1.16) a pro levotočivou šroubovou plochu vztah (1.17).

$$\mathbf{P}(\alpha, t) = (-y(t) \sin \alpha, y(t) \cos \alpha, z(t) + v_0 \alpha) \quad (1.16)$$

$$\mathbf{P}(\alpha, t) = (-y(t) \sin \alpha, y(t) \cos \alpha, z(t) - v_0 \alpha) \quad (1.17)$$

1.4 Přímkové plochy

1.4.1 Obecné poznatky

Přímkové plochy vznikají pohybem přímky p . Přímku p nazýváme *tvořící přímkou* nebo tzv. *površkou plochy*.

Obecně přímkové plochy rozlišujeme na *rozvinutelné* přímkové plochy a na *zborcené* přímkové plochy. Rozvinutelné přímkové plochy jsou charakterizovány tzv. *torzálními přímkami*, což jsou takové přímky, podél nichž existuje jedna tečná rovina. Všechny povrchové přímky rozvinutelných ploch jsou torzální. Typickým příkladem rozvinutelné plochy je rotační kuželová plocha.

Naopak zborcené plochy charakterizují tzv. *regulární přímky*, podél nichž existuje celý svazek tečných rovin. Povrchové přímky zborcených ploch nemusí být všechny regulární. Zborcená plocha může obsahovat jednu nebo hned několik torzálních přímek. Příkladem zborcené plochy může být jednodílný hyperboloid.

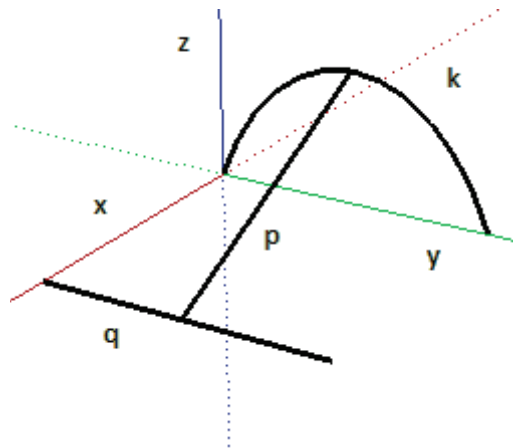
V diplomové práci jsme se zaměřili pouze na plochy zborcené, mezi které zařadíme tzv. *konoidy*. Konoidy jsou plochy určené třemi prvky, kterými jsou řídicí křivka, řídicí přímka a řídicí rovina. Povrchové přímky plochy spojují body na řídicí přímce s body na řídicí křivce. Pro povrchové přímky dále platí, že jsou rovnoběžné s řídicí rovinou. Všechny povrchové přímky jsou navzájem mimoběžné.

Konoidy nazýváme zpravidla podle jejich řídicí křivky. Je-li řídicí křivkou kružnice - *kruhový konoid*, parabola - *parabolický konoid*, šroubovice - *šroubový konoid* atd.

Pokud by řídicí přímka byla kolmá na řídicí rovinu, pak budeme mluvit o tzv. *přímém konoidu*, v opačném případě budeme mluvit o tzv. *kosoúhlém konoidu*. V diplomové práci jsme se omežili pouze na přímé konoidy.

1.4.2 Parametrizace konoidů

Protože konoidy jsou méně známé plochy, pro parametrizaci vyjdeme z obr. 1.1, díky kterému si čtenář může snadněji plochu představit.



Obrázek 1.1: Parametrizace konoidů

Mějme tedy zadánu řídicí křivku k v rovině yz vektorovým vyjádřením (1.18), kde $y(t)$ a $z(t)$ jsou funkce parametru t , který náleží nějakému intervalu I .

$$\mathbf{k}(t) = (0, y(t), z(t)) \quad (1.18)$$

Řídicí rovinou plochy nechť je rovina xz . Protože se v práci zabýváme pouze přímými konoidy, platí že řídicí přímka q ležící v rovině kolmé k rovině xz . Volme tedy řídicí přímku, která leží v rovině xy nebo v rovině s ní rovnoběžnou.

Pro řídicí přímku pak platí vztah (1.19), kde parametr t náleží stejnému intervalu I jako parametr řídicí křivky. Hodnota d určuje vzdálenost řídicí

přímky od roviny, ve které leží řídicí křivka. Jedná se o konstantu z oboru reálných čísel \mathbf{R} a zároveň platí, že $d \neq 0$.

$$\mathbf{q}(t) = (d, y(t), 0) \quad (1.19)$$

Povrchové přímky p spojují body řídicí křivky k a řídicí přímky q . Směrový vektor těchto povrchových přímek vyjádříme vztahem (1.20). Nejedná se zde o směrový vektor konkrétní povrchové přímky, ale o směrový vektor celé množiny povrchových přímek.

$$\mathbf{s} = \mathbf{k}(t) - \mathbf{q}(t) = (-d, 0, z(t)) \quad (1.20)$$

Plochu konoidu pak vyjádříme vztahem (1.21). Vycházíme z parametrického vyjádření přímky v analytické geometrii. Opět se zde jedná o vyjádření celé množiny povrchových přímek, které vytvářejí plochu přímého konoidu. Parametr u je z nějakého intervalu J .

$$\mathbf{P}(u, t) = \mathbf{q}(t) + su \quad (1.21)$$

Po dosazení za řídicí přímku a směrový vektor dostaneme po úpravě konečné vektorové vyjádření přímého konoidu (1.22). Jiné případy umístění řídicí křivek a řídicí přímky se odvozují analogicky.

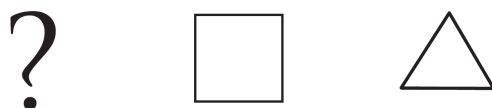
$$\mathbf{P}(u, t) = (d - du, y(t), z(t)u) \quad (1.22)$$

1.5 Pracovní listy

Pro každý typ ploch (rotační, šroubové, přímkové) byl připraven pracovní list, který navazuje na předcházející výklad nové látky. Každý pracovní list obsahuje několik oddílů, které jsou věnované konkrétním plochám.

V úvodu pracovních listů jsou vždy shrnuty základní poznatky týkající se rotačních, šroubových nebo přímkových ploch. Následují menší oddíly ke každé konkrétní ploše a tyto oddíly jsou rozděleny na tři typy úloh. Každý typ úloh je označen jedním z následujících obrázků.

Na obr. 1.2 vlevo je označení pro výkladovou část. Je oddělena rámečkem, abychom zvýraznili, že se jedná o shrnutí výkladu. Pro ověření, zda jsou žáci při výuce pozorní a soustředění, jsme zde uvedli několik jednoduchých otázek a úkolů, u kterých žáci vyplňují odpovědi. Orámovanou část lze využít buď jako shrnutí v závěru hodiny nebo jako kontrolní test k opakování.



Obrázek 1.2: Označení jednotlivých částí v pracovním listě

Na obr. 1.2 uprostřed je označení pro úlohy, které během vyučovací hodiny provádí vyučující společně se žáky. K těmto úlohám učitel využívá tabuli pro matematické odvozování a program Geogebra, ve kterém jsou jednotlivé úlohy vyřešeny. V tomto programu může jednotlivé konstrukce žákům *odkrokovat*. Může zde žákům také ukázat, jak bude vypadat celé řešení příkladu, neboť během hodiny není vždy dostatek času vyřešit celý příklad. Žáci mají ke každému konstrukčnímu příkladu k dispozici návodné kroky.

Třetí část, která je zaměřená na samostatnou práci žáků, je označena obr. 1.2 vpravo. Učitel si na třetí části opět ověří pozornost žáků během vyučovací hodiny. Tyto příklady řeší žáci během výuky samostatně nebo je lze zadat jako domácí úkol.

Pracovní listy jsou přidány do příloh. Všechny konstrukční úlohy a jejich řešení v programu Geogebra jsou součástí vytvořených webových stránek, které jsou umístěné na přiloženém CD.

Kapitola 2

Vybrané rotační plochy

V následující části navážeme na kapitolu (1.2) a budeme se věnovat vybraným rotačním plochám. Vybrali jsme kulovou plochu, anuloid, rotační paraboloid a jednodílný rotační hyperboloid.

U každé plochy je uvedeno jakým způsobem je vytvořena, jak dospějeme k matematickému odvození vektorového vyjádření a dále příklady využití plochy v praxi.

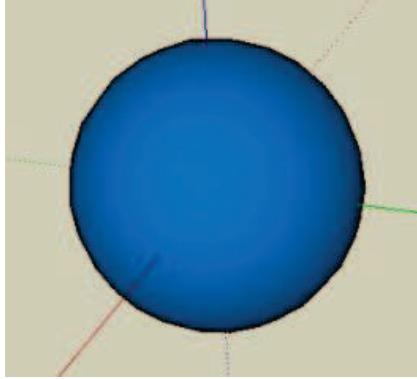
Ke každému typu ploch byl připraven pracovní list, který je dělen na dílčí části. Tyto části jsou věnované otázkám a konstrukčním úlohám na konkrétní plochu. Na závěr byl vypracován model plochy buď ve 3D modelářích (Google SketchUp, Rhino) nebo fyzický model.

2.1 Kulová plocha

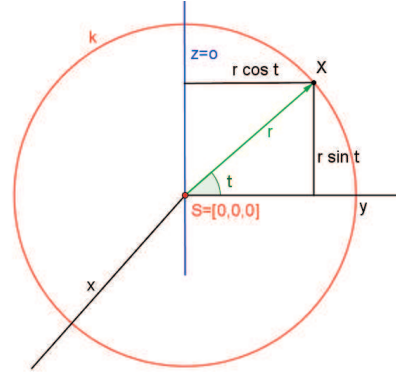
2.1.1 Zařazení plochy

Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost r . Kulová plocha neboli *sféra* vzniká rotací kružnice k kolem osy o , proto tuto plochu řadíme do cyklických rotačních ploch. Osa rotačního pohybu leží v rovině tvořící kružnice, která je také meridiánem plochy.

Aby vznikla kulová plocha, musí střed tvořící kružnice ležet na ose rotačního pohybu. Proto je kulová plocha podle osy rotačního pohybu souměrná. Jako osu rotace zvolíme osu z a střed kulové plochy umístíme do počátku souřadnicové soustavy. Model kulové plochy vidíme na obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Model kulové plochy



Obrázek 2.2: Princip odvození kulové plochy

2.1.2 Matematické odvození plochy

Pro odvození vektorového vyjádření vyjdeme z obr. 2.2. Nechť je dána kružnice k se středem $S = [0, 0, 0]$ a poloměrem r . Tato kružnice leží v rovině yz a je hlavním meridiánem kulové plochy. Osou rotačního pohybu je souřadnicová osa z .

Na tvořící kružnici zvolme bod X . Vyznačíme vzdálenost tohoto bodu od středu S tvořící kružnice (poloměr). Souřadnicová osa y svírá s úsečkou SX úhel t . Pro vypočtení souřadnice x a y bodu X vycházíme z definice goniometrických funkcí. Platí, že tvořící kružnice, je množinou všech bodů X , jejichž vzdálenost od bodu S se rovná poloměru r .

Pro tvořící kružnici tedy platí vektorové vyjádření (2.1). Pro vytvoření kulové plochy stačí využít jen polovinu tvořící kružnice, neboť rotační plochy jsou souměrné podle osy rotačního pohybu. Proto jsou hodnoty parametru t z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$$\mathbf{k}(t) = (0, r \cos t, r \sin t) \quad (2.1)$$

Každý bod tvořící kružnice se pohybuje po rovnoběžkové kružnici ležící v rovině xy nebo v rovině rovnoběžné s rovinou xy . Poloměr rovnoběžkové kružnice označíme R . Tento poloměr R se rovná souřadnici y vektorového vyjádření tvořící polokružnice, platí $R = r \cos t$, viz obr. 2.2.

Kulová plocha je tvořena všemi rovnoběžkovými kružnicemi, které opisují body X na tvořící kružnici. Vektorové vyjádření kulové plochy tedy zapíšeme

ve tvaru (2.2). Parametr t je obsažen ve vyjádření poloměru R . Parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (R \cos u, R \sin u, r \sin t) \quad (2.2)$$

Pokud dosadíme za poloměr R , dostaneme konečné vektorové vyjádření kulové plochy (2.3).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (r \cos t \cos u, r \cos t \sin u, r \sin t) \quad (2.3)$$

Toto vyjádření platí pouze v případě, že střed tvořící kružnice leží v počátku souřadnicového systému. Tvořící kružnici můžeme posouvat libovolně po prostoru. Změní se souřadnice středu z $S = [0, 0, 0]$ na $S = [s_x, s_y, s_z]$.

Tyto posunuté souřadnice přičítáme k jednotlivým souřadnicím vektorového vyjádření (2.3) a kulovou plochu s posunutým středem pak vyjádříme vztahem (2.4).

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}, t) = (s_x + r \cos t \cos u, s_y + r \cos t \sin u, s_z + r \sin t) \quad (2.4)$$

Jedná se o vektorové vyjádření pomocí *sférických souřadnic*¹. Jiným způsobem parametrizace kulové plochy je tzv. *racionální parametrizace*².

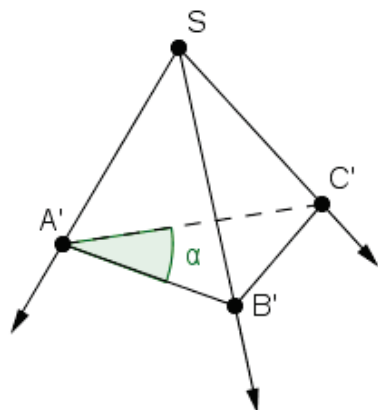
2.1.3 Praktické využití plochy

1. zastřešování budov:

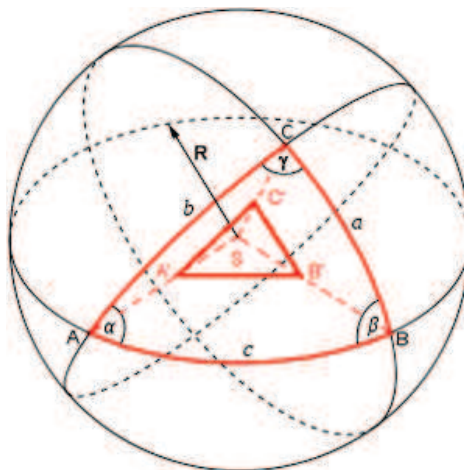
V architektuře je využíváno různých částí kulové plochy k zastřešování budov. Těmito částmi jsou například kulový vrchlík a plocha polokoule. Dalším částem kulové plochy, kterých se využívá k zastřešování, říkáme *sférické trojúhelníky*. Pro vysvětlení pojmu *sférický trojúhelník* zavedeme nejprve pojem *trojhran*. Vyjdeme z obr. 2.3.

¹Někdy se používá pro parametry t a u označení geografické souřadnice. Parametr t určuje zeměpisnou délku (poledníky) a parametr u určuje zeměpisnou šířku (rovnoběžky)

²Ve vektorovém vyjádření $\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(\frac{a(u,v)}{b(u,v)}, \frac{c(u,v)}{d(u,v)}, \frac{e(u,v)}{f(u,v)} \right)$ platí, že prvky $a(u, v)$, $b(u, v)$, $c(u, v)$, $d(u, v)$, $e(u, v)$ a $f(u, v)$ jsou polynomy dvou proměnných, kde $u, v \in \mathbf{R}$. Tyto polynomy se vyjadřují pomocí jednotkové sféry se středem $S = [0, 0, 0]$, na které se zvolí bod $A = [0, 0, 1]$ jako tzv. *pól*. Každý bod sféry se pak spojí s tímto pólem a vzniklé přímky protínají rovinu xy . Vektorové vyjádření těchto přímek se dosazuje do vyjádření pro jednotkovou sféru ve tvaru $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Výsledná racionální parametrizace bude ve tvaru $\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(r \cdot \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}, r \cdot \frac{2u}{1+u^2+v^2}, r \cdot \frac{2v}{1+u^2+v^2} \right)$. Opět je možné využít posunutý střed.



Obrázek 2.3: Vysvětlení pojmu trojhran



Obrázek 2.4: Sférický trojúhelník

Je dána rovina třemi body A' , B' , C' . Dále je dán bod S , který v rovině neleží. Trojhran definujeme jako množinu bodů všech polopřímek s počátkem v bodě S , které protínají danou rovinu v trojúhelníku $A'B'C'$ a budeme ho značit $S(A', B', C')$.

Bod S je vrcholem trojhranu, polopřímky SA' , SB' a SC' jsou hrany trojhranu, úhly $\angle C'A'B' = \alpha$, $\angle A'B'C' = \beta$ a $\angle B'C'A' = \gamma$ nazýváme úhly trojhranu a úhly $\angle A'SC' = \eta$, $\angle A'SB' = \theta$ a $\angle B'SC' = \zeta$ nazýváme stěny trojhranu. Ve sférické trigonometrii se délky stran trojhranu definují jako velikosti příslušných úhlů η, θ, ζ .

Nyní umístíme vrchol trojhranu S do středu kulové plochy o poloměru R . Sférický trojúhelník definujeme jako průnik kulové plochy o poloměru R a trojhranu $S(A', B', C')$. Tam kde hrany trojhranu protnou kulovou plochu získáváme vrcholy sférického trojúhelníku A, B, C , viz obr. 2.4.

Strany sférického trojúhelníku chápeme jako oblouky a, b, c , ve kterých stěny trojhranu protínají kulovou plochu. Pro výpočet délky kruhových oblouků příslušející k danému úhlu α ve stupních je využíván následující vztah (2.5).

$$L = \frac{2\pi r}{360} \cdot \alpha \quad (2.5)$$

Pokud bychom chtěli vypočítat délky oblouků a, b a c , pak bychom

do vztahu (2.5) dosadili příslušné úhly η, θ nebo ζ a poloměr kulové plochy R .

Tyto oblouky jsou zároveň části hlavních kružnic, které jsou taktéž v obr. 2.4 vyznačeny. Hlavní kružnici sféry definujeme jako kružnici, která leží v rovině procházející středem kulové plochy. Poloměr hlavní kružnice je shodný s poloměrem sféry. Více o sférické geometrii lze nalézt v [7].

Typickým příkladem využití sférického trojúhelníku v architektuře je budova Státní opery v Sydney, viz obr. 2.5. Na obr. 2.6 je pak maketa jednotlivých částí kulové plochy (různých sférických trojúhelníků), kterých architekt využil. Tato maketa je umístěna před budovou Státní opery a můžeme si na ní všimnout, jakým způsobem byly jednotlivé *skořepiny* získány.



Obrázek 2.5: Státní opera Sydney



Obrázek 2.6: Maketa skořepin

Pro celou stavbu bylo využito celkem 20 skořepin v následujícím složení. Jednotlivá čísla skořepin jsou uvedena na obr. 2.6 vpravo dole.

- skořepina číslo 1 ... 6x
- skořepina číslo 2 ... 6x
- skořepina číslo 3 ... 4x
- skořepina číslo 4 ... 4x

Zajímavostí je, že všechny jsou pokryty keramickými dlaždicemi lesklé bílé barvy, speciálně dovezených ze Švédska. Budova je také zapsána do seznamu světového kulturního dědictví UNESCO. V případě Státní

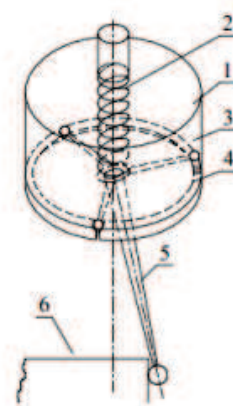
opery v Sydney se jedná o prvního žijícího architekta jehož stavba získala tak významné ocenění. Bohužel rok poté architekt Jørn Utzon zemřel ve věku 90 let.

2. kuličková myš:

Než došlo k dalším technickým pokrokům v oblasti informačních technologií, byla kulová plocha využívána i u tzv. *kuličkové myši*, viz obr. 2.7.



Obrázek 2.7: Schéma kuličkové myši



Obrázek 2.8: Kulová dotyková měřící sonda

Kulička (1) byla umístěna mezi dvěma navzájem kolnými hřídelkami (2). Jedna zajišťovala horizontální pohyb a druhá vertikální pohyb. Při pohybu myši se pohyb přenášel na tyto hřídelky, které následně roztáčely otočné clonky s okýnkem (3, 4). Dále zde byl umístěn světelný senzor, který zmíněné clonky prosvěcoval (5). Vždy se prosvítilo pouze jedno okénko z jedné clonky, protože druhá byla pootočená. Na základě toho, které okénko z jaké clonky bylo prosvícené světelným paprskem, mechanismus rozpoznal směr pohybu. V každé takové myši bylo čidlo, které přeměňovalo přerušované paprsky na elektrické impulsy, které vysílaly signály pro pohyb kursoru na monitoru.

Nevýhodou kuličkové myši bylo, že fungovala jen na určitém typu povrchu. Na hladkém povrchu kulička prokluzovala, proto byl mechanismus nepřesný. Dále byly kuličkové myši velice náchylné na prach,

proto byla důležitá jejich údržba. Podrobnější informace o fungování počítačových myší viz [10].

3. strojírenství:

Kulová plocha je využívána všude, kde je potřeba zajistit co nejmenší tření při posunu. Typickým příkladem jsou kuličková ložiska. Uvnitř kuličkového ložiska jsou drážky, ve kterých se odvalují kovové kuličky. Vzhledem k tomu, že se o kuličkových ložiscích zmíníme ještě v kapitole, která se týká anuloidu, obrázek uvedeme v následující kapitole.

Kulová plocha je využívána také u tzv. *kulové dotykové měřicí sondy*. Jedná se o souřadnicový měřicí přístroj používaný např. pro měření obrobených součástí ve strojírenství. Princip měření spočívá v tom, že v prostoru určíme pevný základní bod a polohy ostatních bodů získáme měřením souřadnicových rozměrů na osách x , y , z . Jako polohu základního bodu uvažujeme souřadnice středu kulového zakončení hrotu sondy.

Na obr. 2.8 je zobrazeno schéma měřicí sondy pracující ve třech směrech. Ve schématu je (1) tělo sondy. Uvnitř je kolem obvodu umístěn kroužek se třemi drážkami (4) s elektrickým kontaktem, ty jsou rovnoměrně rozmístěné po 120° . Měřicí hrot (5) je napojen na tři ramena zakončená kuličkami, které jsou umístěny uvnitř těla sondy v drážkách. V těchto drážkách jsou drženy díky pružině (2), která na ně vyvíjí tlak. Když se kulové zakončení hrotu sondy dotkne měřené součástky (6), přeruší se elektrický kontakt v jedné z drážek a začne se vysílat signál. Více informací o měření ve strojírenství lze nalézt v [11].

2.1.4 Pracovní list - kulová plocha

Pracovní list, týkající se kulové plochy, je součástí pracovního listu k rotačním plochám. Budeme se tedy věnovat pouze oddílu, který je věnován kulové ploše.

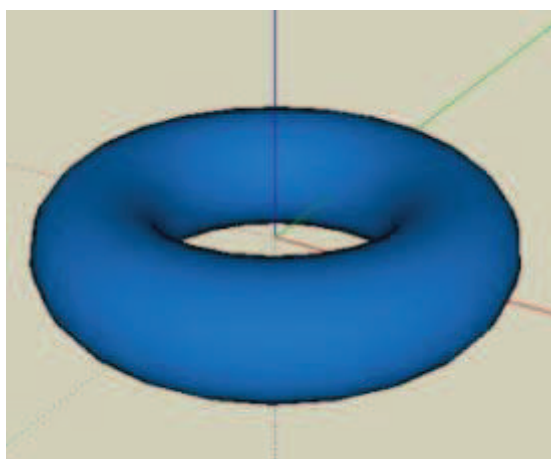
V úvodu je žákům položeno několik otázek, ve kterých jsou shrnuty důležité informace, které byly vyloženy během výuky. Následuje část s konstrukcemi a příklady, které jsou součástí výuky. Pro první příklad, když žáci počítají délky oblouků, je vhodné využít i drátěný model kulové plochy, aby žáci přesně viděli, co počítají.

Ve druhém příkladu mají žáci za úkol sestrojít půdorys bodu ležícího na rotační ploše. Ve třetím a čtvrtém příkladu žáci konstruují řez kulové plochy rovinou. Kvůli nedostatku času zde žáci konstruují pouze jeden bod řezu a následně mají k dispozici řešení v Geogebře. V pátém příkladu je úkolem žáků odvodit vektorové vyjádření kulové plochy.

V poslední části, týkající se kulové plochy, mají žáci tři úkoly. Vybrat správnou odpověď na otázku, dále vybrat správný obrázek podle zadání a následně s využitím konstrukcí z výuky sestrojít sférický trojúhelník pomocí řezu kulové plochy.

2.2 Anuloid

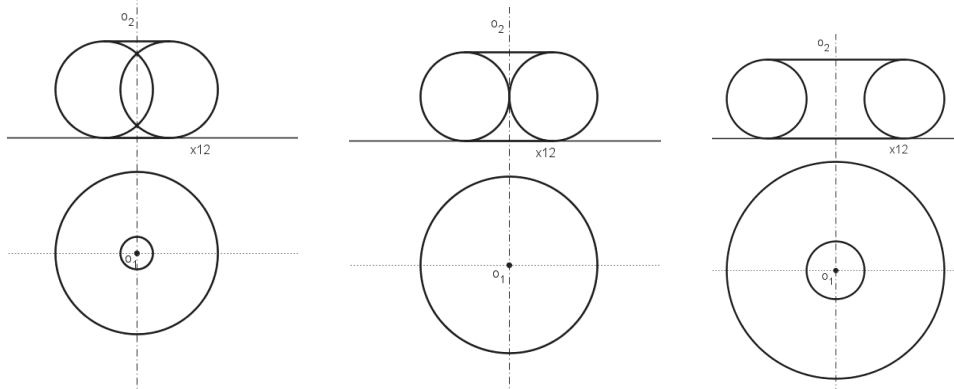
2.2.1 Zařazení plochy



Obrázek 2.9: Model anuloidu

Na obr. 2.9 vidíme plochu zvanou anuloid neboli *torus*. Řadíme ji mezi cyklické rotační plochy, jelikož vzniká rotací kružnice k kolem osy o , která leží ve stejné rovině jako kružnice k . Podmínkou však musí být, že střed rotující kružnice neleží na ose rotačního pohybu (vznikla by kulová plocha). Rozlišujeme tři typy anuloidu, podle vzájemné polohy tvořící křivky a osy, kolem které daná tvořící křivka rotuje.

1. Pokud je osa rotačního pohybu sečnou rotující kružnice, pak tuto plochu nazýváme *melanoid*, viz obr. 2.10 vlevo.
2. Stane-li se osa tečnou rotující kružnice, získáme plochu zvanou *axoid*, viz obr. 2.10 uprostřed.
3. Pokud nenastane ani jedna z předešlých možností, tedy osa rotace je vnější přímkou kružnice, pak této ploše říkáme *anuloid*, viz obr. 2.10 vpravo.



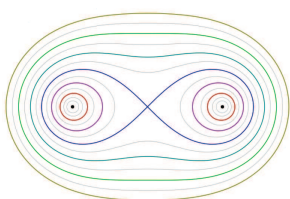
Obrázek 2.10: Zleva: anuloid, axoid, melanoid

Zavedeme zde pojmy *vnitřní* a *vnější* poloměr. Vnitřní poloměr budeme definovat jako poloměr tvořící kružnice a vnější poloměr budeme definovat jako poloměr kružnice, po které se pohybuje střed tvořící kružnice při rotačním pohybu. Anuloid lze zařadit také do skupiny tzv. *obalových ploch*.³

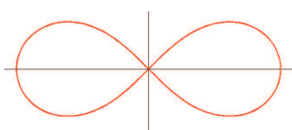
Rovinné křivky, které vzniknou řezem anuloidu rovinou, která je rovnoběžná s osou rotačního pohybu, nazýváme *Cassiniho ovály*. Tvar těchto křivek závisí na poměru vnějšího a vnitřního poloměru plochy anuloidu a také na umístění roviny řezu. Na obr. 2.11 máme různé typy těchto křivek.

³Místo tvořící křivkou jsou obalové plochy vytvářeny tvořící plochou. V každém momentě pohybu se tvořící plocha dotýká vznikající obalové plochy. Tento dotyk je definován pomocí křivky *c* tzv. *charakteristiky*. Anuloid je obalová plocha jednoparametrické soustavy kulových ploch. Vznikne rotací kulové plochy kolem osy a střed kulové plochy neleží na ose rotace.

Jednu z těchto křivek speciálně nazýváme tzv. *Bernoulliova lemniskáta*, viz obr. 2.12. Název pochází z řeckého slova *lemniskos* = smyčka. Bernoulliova lemniskáta připomíná *ležatou osmičku*. Vznikne řezem anuloidu tečnou rovinou τ . Rovina τ prochází bodem na vnitřní rovnoběžkové kružnici anuloidu, kterou nazýváme *hrdlo*.



Obrázek 2.11: Různé Cassiniho ovály



Obrázek 2.12: Bernoulliova lemniskáta



Obrázek 2.13: Profil trasy proudnice

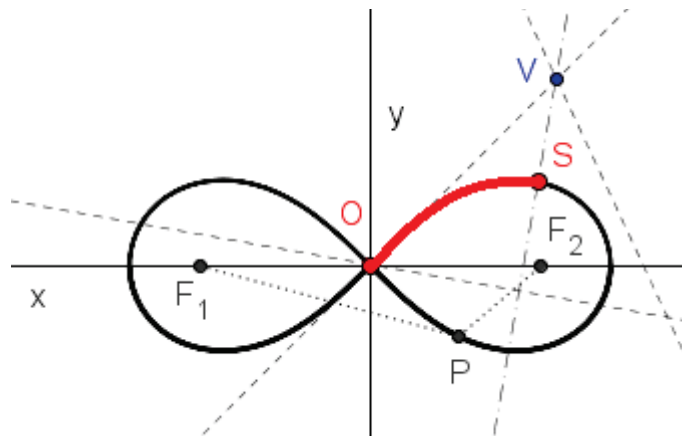
Bernoulliova lemniskáta je využívána v technické praxi například u vodohospodářských staveb, zejména při tvorbě umělých koryt vodních toků. Trasy vodních toků se skládají z protisměrných oblouků. Ty na sebe mohou přímo navazovat nebo mohou být odděleny přímými úseky.

Vodní tok má svou tzv. *vazkost* neboli vnitřní tření. Při styku se dnem a stěnou koryta musí překonávat větší odpor, proto se rychlost proudění směrem ke dnu a ke břehům zmenšuje. S rostoucí hloubkou se zvyšuje rychlost proudění. *Bernoulliova lemniskáta* má v korytě toku tvar, který se nejvíce podobá proudnici, viz obr. 2.13 čárkovaně.

Proudnici definujeme jako plavnou spojnicí míst s největší hloubkou a tím také s nejvyšší rychlostí. Místa s největší hloubkou se nacházejí za místy s největším zakřivením. Čím větší toto zakřivení bude, tím větší bude hloubka toku.

Bernoulliova lemniskáta je zajímavá také proto, že ve svém počátečním a koncovém bodě má nulovou křivost. Tyto dva body splynou do jednoho bodu O tzv. *bodu obratu* nebo také *bodu samoprůniku křivky*. Jedná se o *inflexní bod*, což je bod, ve kterém se křivka mění z konvexní na konkávní a naopak.

Pro tvar koryta se využívá část od bodu O do bodu S , který nazýváme *vrcholovým bodem*, viz obr. 2.14 červenou barvou. Bod S vznikne průnikem křivky s osou vrcholu tečnového polygonu (na obr. 2.14 čárkovaný trojúhelník s vrcholem V). Nebudeme zde zabíhat do detailů, více o této problematice, viz [6].



Obrázek 2.14: Využitá část oblouku lemniskáty

Na obr. 2.14 je vyznačena pouze jedna větev koryta, protisměrný oblouk (druhá větev) vznikne zrcadlovým obrazem větve první.

2.2.2 Matematické odvození plochy

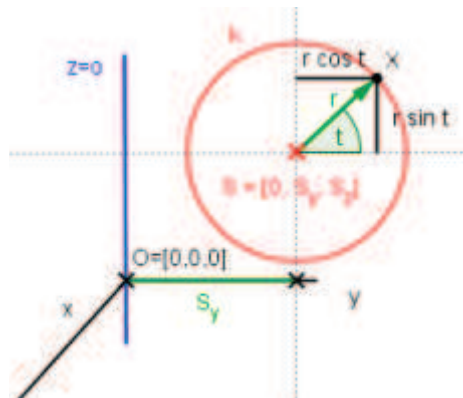
Hlavním meridiánem anuloidu je kružnice k ležící v rovině yz se středem S o souřadnicích $[0, s_y, s_z]$ a poloměrem r , viz obr. 2.15. Hodnoty souřadnic s_y, s_z jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . Osu rotace ztotožníme se souřadnicovou osou z . Budeme tedy odvozovat vektorové vyjádření anuloidu, jehož vnitřní poloměr je r a vnější poloměr je s_y .

Opět zvolíme bod X na tvořící kružnici. Jeho vzdálenost od středu kružnice je rovná poloměru r . Vyjdeme z definice pro goniometrické funkce a vyjádříme souřadnice y a z bodu X .

Tvořící kružnice je množinou všech bodů X , které mají vzdálenost od středu S rovnu poloměru r . Vektorové vyjádření tvořící kružnice vyjádříme vztahem (2.6). Parametr t je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$, protože u anuloidu už nestačí jen polovina tvořící kružnice.

$$\mathbf{k}(t) = (0, r \cos t + s_y, r \sin t + s_z) \quad (2.6)$$

Každý bod tvořící kružnice se pohybuje po rovnoběžkové kružnici, ležící v rovině rovnoběžné s rovinou xy . Stejně jako u kulové plochy pro poloměr



Obrázek 2.15: Princip odvození anuloidu

rovnoběžkových kružnic anuloidu platí vztah (2.7). Absolutní hodnota zajišťuje, aby poloměr rovnoběžkové kružnice nebyl záporný.

$$R = y(t) = |r \cos t + s_y| \quad (2.7)$$

Pro vyjádření anuloidu pak platí vztah (2.8). Souřadnice x a y určují výše zmíněné rovnoběžkové kružnice a souřadnice z sděluje v jaké rovině daná rovnoběžková kružnice leží. Parametr u je také z intervalu $(0, 2\pi)$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (R \cos u, R \sin u, r \sin t + s_z) \quad (2.8)$$

Po dosazení za poloměr R z výše uvedeného vztahu (2.7) získáme konečné vektorové vyjádření anuloidu ve tvaru (2.9).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (|r \cos t + s_y| \cos u, |r \cos t + s_y| \sin u, r \sin t + s_z) \quad (2.9)$$

2.2.3 Praktické využití plochy

1. duše pneumatik:

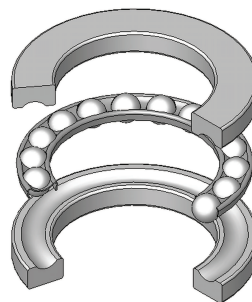
V praxi lze anuloid využívat u duší jízdních kol a pneumatik aut. První kola byla dřevěná a pobitá kovovými pásky. Cesty byly však tehdy hrbolaté a jízda nebyla příliš pohodlná. Proto bylo snahou nalézt vhodné nahrazení.

První pokusy o vynález pneumatiky jsou datované do 18. století. Postupem času se podařilo odstranit chyby a byly vyvinuty moderní, vzduchem plněné pneumatiky. Ty měly velké uplatnění v sériové výrobě jízdních kol a o několik let později jich využíval i letecký průmysl.

Duše pneumatik v nafouknutém stavu mají tvar anuloidu. Této plochy je využíváno kvůli styčnosti s vozovkou. Jejím využitím dochází k menšímu odporu při valení a díky tomu, že se jedná o gumový materiál, projevila se i vlastnost lepší přilnavosti k povrchu. Díky vnitřnímu otvoru anuloidu je možné pneumatiku snadno upevňovat a případně vyměňovat. Duše pneumatiky je na obr. 2.16. Více informací o historii a současnosti pneumatik, viz [12].



Obrázek 2.16: Duše pneumatiky



Obrázek 2.17: Kuličkové ložisko

2. kuličková ložiska:

Ve strojírenství se s anuloidem setkáváme u ložisek. Ložiska se rozdělují podle druhu tření mezi částmi strojů na kluzná a valivá. Do valivých ložisek zařadíme i tzv. *kuličková ložiska*.

Jedná se o sestavu vnitřního a vnějšího kroužku, mezi nimiž se v drážce pohybují valivá tělesa. Těmito valivými tělesy jsou kuličky stejného rozměru. Tato strojní součástka je typickou ukázkou toho, že anuloid lze zařadit do obalových ploch.

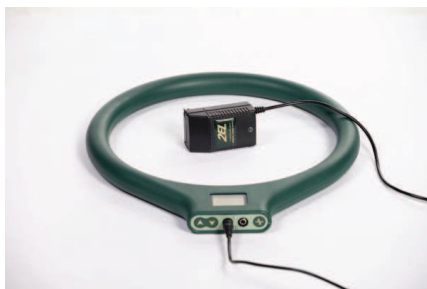
Anuloidem jsou zde dvě drážky položené proti sobě, ve kterých se pohybují kovové kuličky, které můžeme považovat za jednoparametrickou soustavu kulových ploch. Drážky jsou obalovou plochou těchto kuliček.

Výhodou využití valivých ložisek je malé tření a tím i malé zahřívání, s čímž souvisí i nižší spotřeba maziva. Naopak nevýhodami jsou například citlivost na prach, nárazy a tím i větší hlučnost. Kuličkové ložisko máme na obr. 2.17. Tento příklad využití byl čerpán z [8].

3. Biotorus:

Anuloid lze využívat i v medicíně, konkrétně v magnetoterapii. Jedná se o přístroj tvaru anuloidu, uvnitř kterého je navinutá cívka (tzv. *toroidní vinutí*), která vytváří nízkofrekvenční pulsní magnetické pole (NPMP). Ukázka toroidního vinutí je na obr. 2.19. Protože je použito toroidní jádro, vznikne uzavřený magnetický tok s nízkými magnetickými ztrátami.

Nejdůležitějším účinkem (NPMP) na lidský organismus je rozšiřování cév a tím lepší prokrvování, urychlení regenerace buněk a tím snadnější nastartování procesu hojení nebo odstranění svalového napětí a otoků. Pokud by byla frekvence příliš vysoká, mohlo by dojít k nežádoucím účinkům. Těmi mohou být bolest hlavy, kožní změny a případně i porucha srdečního rytmu. Popisovaný přístroj je znázorněn na obr. 2.18, podrobné informace viz [13].



Obrázek 2.18: Biotorus



Obrázek 2.19:
Toroidní vinutí

2.2.4 Pracovní list - anuloid

Navázali jsme na předešlé teoretické informace a praktická využití anuloidu a v rámci pracovního listu na rotační plochy jsme přidali oddíl věnovaný anuloidu.

Úvodní část je shrnutím probrané látky. Žáci odpovídají na položené otázky a plní jednoduché úkoly týkající se teoretických poznatků o anuloidu.

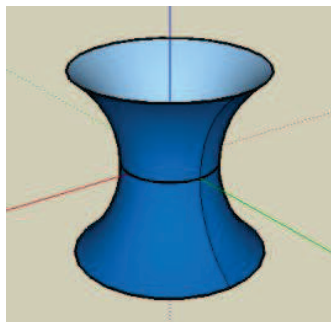
Následují úlohy, které během vyučovací hodiny provádí učitel společně se žáky. V první úloze žáci odvozují nárys bodu ležícího na anuloidu. Ve druhém příkladě konstruují tečnou rovinu anuloidu daným bodem. Ve třetím příkladě mají žáci za úkol odvodit vektorové vyjádření ke všem typům anuloidu a načrtnout obrázky. Ve čtvrtém příkladě sestavují řez anuloidu.

První, druhá a čtvrtá úloha slouží jako vzor pro konstrukci třetího příkladu v části samostatné práce žáků, ve které jsou tyto elementární úlohy spojeny dohromady. V tomto samostatném příkladě žáci opět konstruují řez anuloidu tečnou rovinou vedenou bodem na vnitřním poloměru hrdelní rovnoběžkové kružnice. Výslednou křivkou řezu je *Bernoulliiova lemniskáta*.

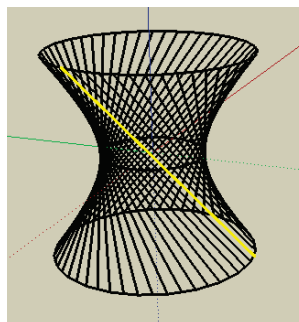
Všechny konstrukční úlohy je možné opět postupně krokovat v programu Geogebra. Řešení v tomto programu jsou výhodná i v tom, že jimi lze ušetřit čas a žáci opět mohou konstruovat pouze několik bodů a celkové řešení lze ukázat v Geogebře.

2.3 Jednodílný rotační hyperboloid

2.3.1 Zařazení plochy



Obrázek 2.20: Vznik plochy rotací hyperboly



Obrázek 2.21: Vznik plochy rotací přímky

Plochu jednodílného rotačního hyperboloidu lze vytvořit dvěma různými způsoby. Jako tvořící křivku k můžeme volit hyperbolu. Pak tato tvořící

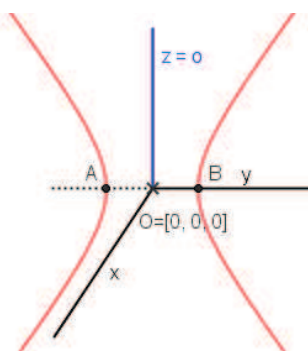
křivka rotuje kolem své vedlejší osy. Na obr. 2.20 je model jednodílného rotačního hyperboloidu vytvořeného právě rotací hyperboly.

Druhou možností je vytvořit plochu rotací přímky p , která je mimoběžná s osou rotačního pohybu o . Lze ji tedy zařadit také do přímkových ploch. Na obr. 2.21 je model plochy vzniklé rotací přímky.

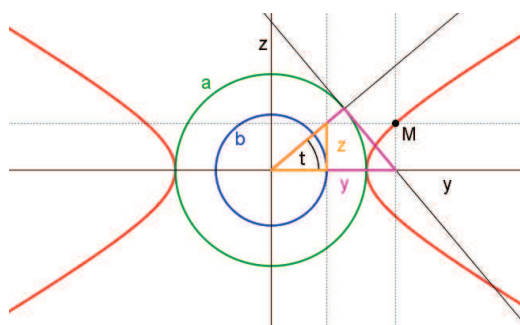
Na jednodílném rotačním hyperboloidu pak vzniknou dva systémy přímek tzv. *reguly*. Přímky každého regulu jsou navzájem mimoběžné. Každá přímka jednoho systému protíná všechny přímky toho druhého a naopak.

2.3.2 Matematické odvození plochy

Pro odvození vektorového vyjádření jednodílného rotačního hyperboloidu vyjdeme z obr. 2.22. Necht' je tvořící křivkou hyperbola ležící v rovině yz , jejíž střed leží v počátku $O = [0, 0, 0]$. Osou rotačního pohybu je vedlejší osa hyperboly, jež splývá se souřadnicovou osou z .



Obrázek 2.22: Princip rotace hyperboly



Obrázek 2.23: Postup parametrizace hyperboly

Rovnici hyperboly můžeme díky znalosti analytické geometrie napsat ve tvaru (2.10), kde a je délka hlavní poloosy a b je délka vedlejší poloosy hyperboly. Hodnoty a, b jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . V případě, že bude platit $a = b = 1$ budeme hovořit o rovnoosé hyperbole. Tvořící křivka (hyperbola) bude též meridiánem jednodílného rotačního hyperboloidu.

$$1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \quad (2.10)$$

Pro odvození parametrizace tvořící křivky vyjdeme z obr. 2.23. Červenou barvou je vyznačena tvořící křivka a na ní je zvolen libovolný bod M . Kružnice a má poloměr rovný délce hlavní poloosy a kružnice b má poloměr rovný délce vedlejší poloosy. Díky konstrukci dvou pravoúhlých trojúhelníků můžeme z definice goniometrických funkcí odvodit souřadnice zvoleného bodu M .

Z růžového trojúhelníku odvodíme souřadnici y a ze žlutého trojúhelníku souřadnici z . Dostaneme se tedy ke vztahu (2.11). Hyperbola je souměrná podle osy rotačního pohybu, proto nám postačí jedna větev hyperboly. Hodnoty parametru t jsou tedy z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$$\mathbf{k}(t) = \left(0, \frac{a}{\cos t}, b \tan t \right) \quad (2.11)$$

Každý bod tvořící křivky se pohybuje po rovnoběžkové kružnici se středem na ose z a pro poloměr každé rovnoběžkové kružnice platí vztah (2.12).

$$R = y(t) = \frac{a}{\cos t} \quad (2.12)$$

Vektorové vyjádření jednodílného rotačního hyperboloidu pak zapisujeme ve tvaru (2.13). Souřadnice x a y určují rovnoběžkovou kružnici a souřadnice z určuje v jaké rovině daná rovnoběžkové kružnice leží.

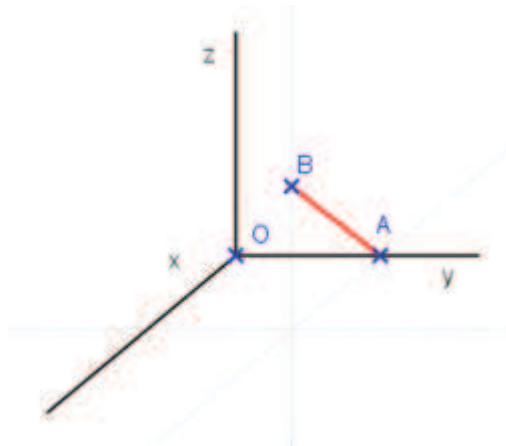
$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (R \cos u, R \sin u, b \tan t) \quad (2.13)$$

Po dosazení do vztahu (2.13) za poloměr R získáme konečné vektorové vyjádření jednodílného rotačního hyperboloidu (2.14). Parametr u nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Toto vyjádření platí jen tehdy, je-li střed hyperboly v počátku souřadné soustavy.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = \left(\frac{a}{\cos t} \cos u, \frac{a}{\cos t} \sin u, b \tan t \right) \quad (2.14)$$

Pokud posuneme střed hyperboly do libovolného bodu, změní se jeho souřadnice z $S = [0, 0, 0]$ na $S = [s_x, s_y, s_z]$. Tyto posunuté souřadnice přičítáme k jednotlivým souřadnicím vektorového vyjádření (2.14) a jednodílný rotační hyperboloid s posunutým středem pak vyjádříme vztahem (2.15).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = \left(\frac{a}{\cos t} \cos u + s_x, \frac{a}{\cos t} \sin u + s_y, b \tan t + s_z \right) \quad (2.15)$$



Obrázek 2.24: Princip odvození jednodílného rotačního hyperboloidu pomocí rotace přímky

Plochu jednodílného rotačního hyperboloidu lze vyjádřit také pomocí rotace přímky k , pro kterou platí, že je mimoběžná s osou rotačního pohybu. Vyjdeme z obr. 2.24. Mějme tedy dva body $A = [0, b, 0]$, $B = [a, b, c]$. Hodnoty a, b, c jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . Pro vznik jednodílného rotačního hyperboloidu platí, že $a \neq 0$ a zároveň i $c \neq 0$. Jinak bychom vytvořili rotační válcovou plochu nebo rovinu. Osou rotačního pohybu je osa z . Body A a B určují tvořící přímku k . Směrový vektor s tvořící přímky k určíme vztahem (2.16).

$$\mathbf{s} = B - A = (a, 0, c) \quad (2.16)$$

Dále vyjdeme z parametrického vyjádření přímky v analytické geometrii a vyjádříme tvořící přímku vztahem (2.17) a osu rotačního pohybu vztahem (2.18). Parametr t je v obou vztazích z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{k}(t) = A + \mathbf{s} \cdot t = (at, b, ct) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{o}(t) = (0, 0, ct) \quad (2.18)$$

Každý bod tvořící přímky se pohybuje po příslušné rovnoběžkové kružnici. Vzdálenost tvořící přímky od osy rotačního pohybu určuje poloměr rovnoběžkové kružnice. Vektor této vzdálenosti vyjádříme vztahem (2.19).

$$\mathbf{d} = \mathbf{k}(t) - \mathbf{o}(t) = (at, b, 0) \quad (2.19)$$

Poloměr rovnoběžkové kružnice R se bude rovnat velikosti vektoru vzdálenosti, viz vztah (2.20).

$$R = |\mathbf{d}| = \sqrt{a^2t^2 + b^2} \quad (2.20)$$

Plocha jednodílného rotačního hyperboloidu je tvořena rovnoběžkovými kružnicemi všech bodů tvořící přímky. Vyjádříme ji vztahem (2.21), kde parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (R \cos u, R \sin u, ct) \quad (2.21)$$

Pokud dosadíme do vztahu (2.21) za poloměr R z výše uvedeného vztahu (2.20) získáme konečné vektorové vyjádření jednodílného rotačního hyperboloidu ve tvaru (2.22).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (\sqrt{a^2t^2 + b^2} \cos u, \sqrt{a^2t^2 + b^2} \sin u, ct) \quad (2.22)$$

2.3.3 Praktické využití plochy

1. stavitelství:

Plocha jednodílného hyperboloidu má v současnosti v architektuře zastoupení v podobě chladících věží, komínů, rozhleden nebo podpěrných sloupů či designových dekorací.



Obrázek 2.25: Chladící věže jaderné elektrárny Temelín



Obrázek 2.26: Lávka pro pěší Manchester

Pro chladící věže je využívána, jelikož se jedná o plochu tvořenou rotací přímky. Je proto snadné vytvořit bednění, které je zaléváno betonem. Hmota je vyztužena širokými kovovými dráty ve směru povrchových přímek, aniž by musely být ohýbány. Jedná se o masivní



Obrázek 2.27: Rozhledna Borůvka u obce Hluboká nedaleko Pardubic



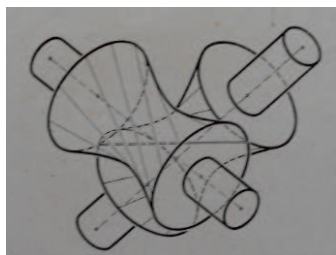
Obrázek 2.28: Televizní věž v přístavu města Kobe, Japonsko

železobetonovou konstrukci, která je díky zmíněné výztuži pevná a stabilní. Stavba může dosahovat až 200 m do výšky a 100 m v průměru.

Na předchozích obr. 2.25 až 2.28 jsou různé příklady využití plochy jednodílného hyperboloidu v architektuře. Pro tento příklad praktického využití jsme čerpali z [2].

2. strojírenství:

Plocha jednodílného rotačního hyperboloidu bývá využívána i ve strojírenství. Typickým příkladem je šroubové soukolí, viz obr. 2.29. Jedná se o mechanický šroubový převod pomocí ozubených kol. Rotační pohyb a točivý moment se pomocí hnacího kola přenáší na kolo hnané díky tvarovému styku zubů jednotlivých kol. Osy těchto ozubených kol neboli *hřídele* jsou navzájem mimoběžné.



Obrázek 2.29: Soukolí hypoidního převodu a jeho detail

Název šroubové soukolí vznikl z pohybu ozubených kol. Při jejich otáčeni dochází zároveň i k posunu, protože zde vznikají tzv. *axiální síly*. Jedná se o síly podél hřídele, které se snaží při záběru kola posouvat ve směru hřídele.

V kapitole (1.3) jsme definovali šroubový pohyb jako složení pohybu rotačního a translačního. Zmíněné soukolí lze vytvořit pouze za předpokladu, že kola jsou částmi hyperboloidu. Při jejich vzájemném pohybu se přímky jednoho hyperboloidu posouvají po přímkách toho druhého.

Profil boku zubů je tedy tzv. *hypoidního typu*, tedy se šikmými zuby. Pro záběr dvou ozubených kol se šikmými zuby má zpravidla jedno kolo sklon zubů doleva, zatímco druhé kolo má sklon zubů doprava. Detail šroubového soukolí se šikmými zuby a mimoběžnými hřídeli je na obr. 2.29 vpravo.

Tyto šikmé zuby jsou výhodné v tom, že mají mnohem tišší chod, protože záběr zubů je plynulý, na rozdíl od zubů přímých, kde je záběr nárazový (*cukavý*). Protože jsou zuby šikmé, vzniká při pohybu již zmíněná *axiální síla* a ta se snaží při pohybu kolo tlačit do strany. Tomuto nežádoucímu efektu konstruktéři částečně zabráňují pomocí ložisek.

Výroba tohoto soukolí je velice obtížná a také nákladná. Uplatnění však mají především u náročných převodů např. u automobilových převodovek. Podrobnosti o soukolích viz [8].

2.3.4 Pracovní list

V pracovním listě o rotačních plochách je opět blok věnovaný jednodílnému rotačnímu hyperboloidu. V první části žáci odpovídají na otázky, které jsou jim položeny za účelem shrnutí a zopakování výkladu o jednodílném rotačním hyperboloidu.

V druhé části žáci v prvním příkladu odvozují půdorys bodu ležícího na rotačním jednodílném hyperboloidu. Ve druhém příkladu konstruují řez rotačního jednodílného hyperboloidu. V dalším příkladu mají napsat vektorové vyjádření plochy, je-li tvořící křivkou hyperbola.

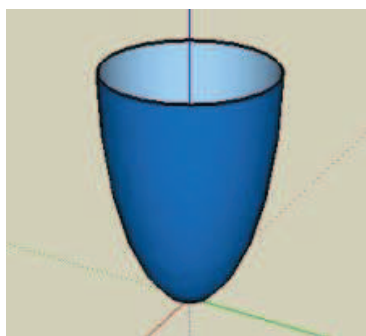
V poslední části mají žáci při samostatné práci odpovědět na dvě teoretické otázky. V jedné mají napsat příklady využití plochy a ve druhé mají

vybrat správné tvrzení. V dalším příkladě si žáci opakují konstrukce v axonometrii a sestavují jednotlivé polohy přímky při její rotaci kolem osy z .

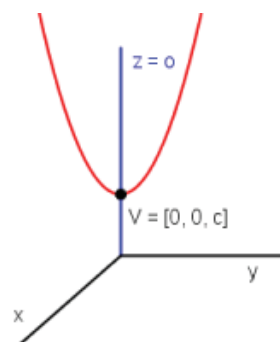
2.4 Rotační paraboloid

2.4.1 Zařazení plochy

Tvořící křivkou plochy rotačního paraboloidu je parabola. Vrchol tvořící křivky leží na přímce, kterou nazýváme *osa paraboly*. Zároveň je tato přímka osou rotačního pohybu a leží ve stejné rovině jako tvořící křivka. Model plochy je na obr. 2.30.



Obrázek 2.30: Model rotačního paraboloidu



Obrázek 2.31: Princip odvození rotačního paraboloidu

2.4.2 Matematické odvození plochy

Jak bylo řečeno výše, plocha rotačního paraboloidu vzniká rotací paraboly kolem své osy, viz obr. 2.31. Mějme dánu parabolu v rovině yz . Osou rotačního pohybu je souřadnicová osa z , podle které je tvořící křivka souměrná. Vrchol paraboly má souřadnice $V = [0, 0, c]$. Hodnota konstanty c je z oboru reálných čísel \mathbf{R} .

Vyjdeme z definice kvadratické funkce, jejíž vrcholem je bod V . Dále zohledníme, že parabola leží v rovině yz a získáme následující tvar kvadratické funkce $z = ay^2 + c$, kde a, c jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . Zároveň platí, že hodnota $a \neq 0$, protože by jinak nevznikla kvadratická funkce.

Parametrizaci provedeme tak, že položíme $y = t$. Vektorové vyjádření tvořící křivky k pak zapíšeme vztahem (2.23). Protože je parabola souměrná podle osy z pro parametr t uvažujeme hodnoty z intervalu $\langle 0, \infty \rangle$.

$$\mathbf{k}(t) = (0, t, at^2 + c) \quad (2.23)$$

Každý bod tvořící křivky se opět pohybuje po příslušné rovnoběžkové kružnici pro jejíž poloměr platí vztah (2.24).

$$R = y(t) = t \quad (2.24)$$

Rotační paraboloid vyjádříme vztahem (2.25), kde parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Souřadnice x a y opět určují příslušné rovnoběžkové kružnice a souřadnice z určuje v jaké rovině daná rovnoběžková kružnice leží.

$$\mathbf{P}(u, t) = (R \cos u, R \sin u, at^2 + c) \quad (2.25)$$

Po dosazení za poloměr R z výše uvedeného vztahu (2.24) získáme konečné vektorové vyjádření rotačního paraboloidu (2.26).

$$\mathbf{P}(u, t) = (t \cos u, t \sin u, at^2 + c) \quad (2.26)$$

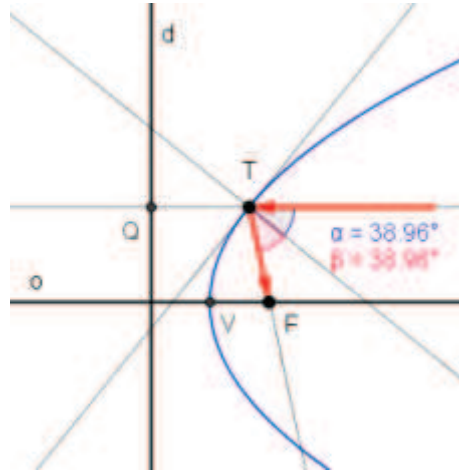
2.4.3 Praktické využití plochy

1. akustická zrcadla:

Rotační paraboloid je využíván u tzv. *akustických zrcadel*. Jedná se o přístroj, který zachycuje vlnění z okolí. Parabolická plocha odráží zvukové vlny do jednoho místa (ohniska), kde je umístěn mikrofon. Nyní zdůvodníme, proč se vlnění odráží právě do místa mikrofonu. Vyjdeme z obr. 2.32.

Parabolu definujeme jako množinu všech bodů X , které mají stejnou vzdálenost od ohniska jako od řídicí přímky. Tedy spojnice libovolného bodu X a ohniska F je stejně dlouhá jako vzdálenost daného bodu X od řídicí přímky d . Této spojnici a rovnoběžce s osou paraboly vedené daným bodem X říkáme *průvodič*.

Zvuková vlna je vlastně výše zmíněný průvodič, protože se šíří rovnoběžně s osou paraboly a odráží se do ohniska. Platí tedy $|TF| = |Td|$, což plyne z osové souměrnosti podle tečny vedené bodem T ke křivce.



Obrázek 2.32: Princip odrazu paprsků dopadajících na parabolu

Bod T je místo dopadu paprsku na parabolu. Jelikož navíc platí, že úhel dopadu se rovná úhlu odrazu, paprsky se odráží do ohniska, kde je umístěn mikrofon.

Akustická zrcadla byla využívána ještě před vynálezem radarů. Již během první světové války pomáhala při varování před blížícími se nepřátelskými letadly a vzducholoděmi. S vývojem letectví a díky vynalezení radaru byla tato zrcadla postupem času ve vojenství zbytečná.

V dnešní době je však stále využívají některé automobilové závody. Pomocí nich lze určit slabá místa karoserie ovlivňující hlučnost automobilu. Ty jsou dvojího typu. Oblasti, které se podílejí na vzniku aerodynamického hluku při jízdě automobilem a dále místa, kudy může proniknout hluk do kabiny vozu.

Akustické zrcadlo se plynule posouvá podél karoserie vozu a mapuje úroveň hluku. Z naměřených hodnot odborníci poznají, kudy proniká dovnitř nebo ven z vozu nežádoucí hluk. Z vnějšího prostoru se zaměřují na výstupky v karoserii např. zpětná zrcátka. Naopak, když se měří zvukotěsnost vozu, zdroj zvuku je umístěn uvnitř a zjišťuje se, kudy uniká ven. Na obr. 2.33 je akustické zrcadlo, které bylo využíváno ve vojenství.

Na principu akustického zrcadla funguje i komunikace mezi běluhami, viz obr. 2.34.⁴ Pro příklad využití plochy jako akustických zrcadel jsme se nechali inspirovat články, viz [14] a [15].



Obrázek 2.33: Akustické zrcadlo nedaleko Kilnsea - VB



Obrázek 2.34: Běluha severní

2. parabolická zrcadla:

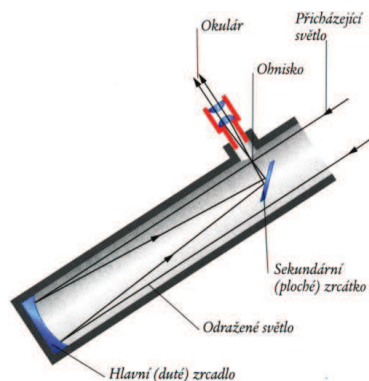
Zrcadlová plocha je obecně lesklá plocha, která může být rovinná, kulová nebo jinak zakřivená. Tímto zakřivením může být i plocha rotačního paraboloidu, proto se těmto zrcadlům říká tzv. *parabolická zrcadla*. Zobrazování zrcadly se řídí zákony paprskové optiky nebo-li šířením světla a zákonem pro odraz světla.

Zakřivená zrcadla se využívají proto, že mohou měnit velikost obrazu. Rozlišujeme dva typy zakřivených zrcadel, duté neboli *konkávní* a vypuklé neboli *konvexní*.

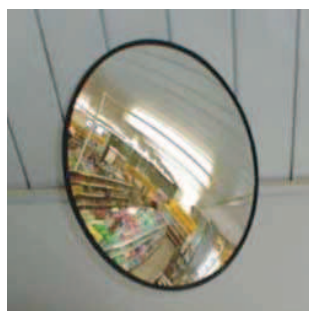
Parabolická zrcadla jsou užitečná v tom, že nepodléhají tzv. *kulové vadě zrcadla*. Tato vada se projevuje tak, že obrazem bodu není bod ale malá ploška. Paprsky se totiž nesbíhají do jednoho bodu a dochází tak ke zkreslení obrazu. U akustických zrcadel jsme si vysvětlili princip odrazu paprsku na parabole. Protože se paprsky sbíhají do jednoho bodu (ohniska), tak k této vadě obrazu nedochází.

⁴Jedná se o druh kytovce, který je charakteristický svou bílou barvou. Vyhledávají spíše mělké ledové vody. Jsou barvoslepe, proto se v kalných vodách a během severských nocí orientují tzv. *echolokací* neboli ultrazvukovými vlnami. Slyší ultrazvuk až do 200 kHz zatímco člověk pouhých 20 kHz. Jako akustické zrcadlo jim slouží výrůstek na hlavě, tzv. *meloun*.

Dutá zrcadla jsou využívána například u automobilových světlometů, protože stejně jako sbíhání paprsků do ohniska lze opačným postupem z bodu (žárovky) přes odraz od parabolické plochy získat rovnoběžný svazek paprsků. Dále jsou dutá zrcadla využívána u astronomických dalekohledů u kterých nevadí, že obraz je převrácený. Typickým příkladem je Newtonův dalekohled.



Obrázek 2.35: Řez Newtonovým astronomickým dalekohledem



Obrázek 2.36: Parabolické bezpečnostní zrcadlo

Vypuklá zrcadla se využívají například u zpětných zrcátek, protože mají velký zorný úhel. Proto je lze využívat i jako bezpečnostní zrcadla v nákupních centrech.

Přístroji, které pracují na podobném principu odrazu, jsou satelity, radioteleskopy, různá seismická či akustická čidla, směrový mikrofón špionážní techniky či foto-deštníky. Více informací o zobrazování zrcadly, viz [16].

2.4.4 Pracovní list

V rámci pracovního listu o rotačních plochách jsme přidali ještě poslední blok věnovaný ploše rotačního paraboloidu. V první části žáci opět jako u předchozích ploch odpovídají na otázky, které shrnují a opakují základní informace o ploše.

V další části mají žáci během výuky konstruovat nárys bodu, který leží na ploše rotačního paraboloidu. Dále mají za úkol konstruovat řez rotačního paraboloidu rovinou.

Ve třetí části žáci konstruují opět dva příklady zaměřené na řez rotačního paraboloidu. Sledují jak se mění křivka, která vznikne daným řezem různým umístěním roviny. Poslední příklad je opět opakováním. Žáci v něm mají za úkol vybrat správný obrázek.

Kapitola 3

Vybrané šroubové plochy

Navážeme na kapitolu (1.3) a budeme se věnovat vybraným šroubovým plochám. Vybrány byly pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha, kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha a cyklické šroubové plochy se zaměřením na Archimédovu serpentinu.

U každé plochy opět uvedeme, jakým způsobem vzniká. Dále provedeme matematické odvození vektorového vyjádření plochy a uvedeme příklady využití plochy v praxi. Ke každé ploše připravíme pracovní listy s otázkami a zadáním konstrukčních úloh. Na závěr přidáme model plochy vytvořený buďto ve 3D modelářích (Google SketchUp, Rhino) nebo vytvoříme fyzický model.

Kapitola o Archimédově serpentině je pojata trochu odlišně, protože se jedná již o složitý typ plochy pro žáky střední školy. Proto zde budeme mluvit o cyklických šroubových plochách obecně a následně se zaměříme více na Archimédovu serpentinu, avšak bez podrobného odvození vektorového vyjádření. Detailní odvození parametrizace Archimédovy serpentine bude možné nalézt na přiložených webových stránkách.

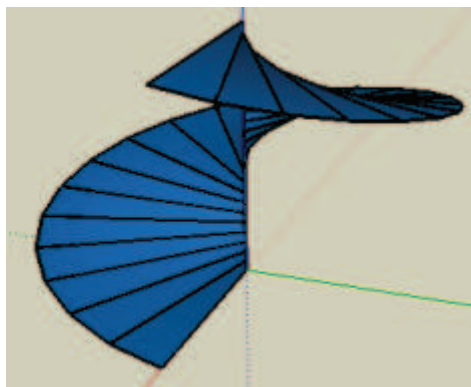
3.1 Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

3.1.1 Zařazení plochy

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem přímky p , která v každé své poloze protíná osou šroubového pohybu. Navíc

je přímka p na tuto osu v každé své poloze kolmá. Někdy se můžeme setkat s názvem *schodová plocha*, jelikož její nejčastější uplatnění nalezneme u točitých schodišť. V odborné literatuře můžeme nalézt i označení *helikoid*.

Pravoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu lze zařadit i mezi *konoidy*. Řídicí křivkou tohoto konoidu je šroubovice, řídicí přímkou je osa šroubového pohybu a řídicí rovinou je rovina kolmá k ose šroubového pohybu. Pro plochu užíváme názvu *přímý šroubový konoid*. K těmto plochám se ještě v následujících kapitolách vrátíme. Model pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy máme na obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Model pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy

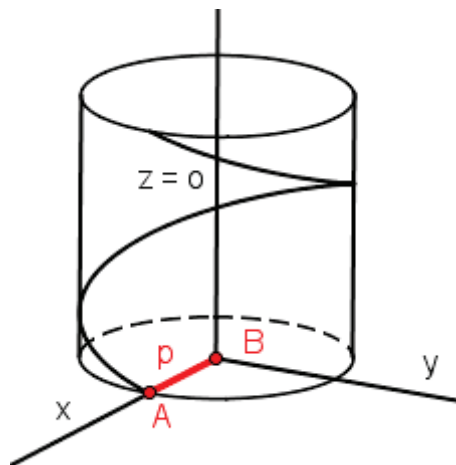
3.1.2 Matematické odvození plochy

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha, vzniká šroubovým pohybem tvořící křivky. Touto tvořící křivkou je přímka p , která koná šroubový pohyb a je kolmá na osu o . Přímka p je určena body $A = [0, 0, 0]$ a $B = [a, 0, 0]$. Hodnota konstanty a je z oboru reálných čísel \mathbf{R} a zároveň platí, že $a \neq 0$. Pro směrový vektor přímky p využijeme analytické geometrie a vyjádříme jej vztahem (3.1).

$$\mathbf{s} = B - A = (a, 0, 0) \quad (3.1)$$

Dále využijeme parametrizaci tvořící křivky (přímky) opět vztahem z analytické geometrie, viz vyjádření (3.2). Parametr t je z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{k}(t) = A + st = (at, 0, 0) \quad (3.2)$$



Obrázek 3.2: Princip odvození schodové plochy

Každý bod tvořící přímky koná šroubový pohyb. Tedy rotaci kolem osy o a zároveň se posouvá ve směru osy o . V rovině xy se pohybuje po rovnoběžkové kružnici o poloměru R , pro který platí vztah (3.3).

$$R = x(t) = at \quad (3.3)$$

Ve směru osy z se daný bod posune o výšku $v = v_0 u$. Parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Spojením rotačního a posuvného pohybu můžeme vyjádřit schodovou plochu ve tvaru (3.4).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = (R \cos u, R \sin u, v) \quad (3.4)$$

Pokud dosadíme do vztahu (3.4) za poloměr R a za výšku v , o kterou se přímka p při daném otočení posune, získáme výsledné vektorové vyjádření pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy (3.5).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = (at \cos u, at \sin u, v_0 u) \quad (3.5)$$

Jak bylo řečeno výše, pravoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu lze vyjádřit i jako šroubový konoid¹. Tuto parametrizaci uvádíme jen jako poznámku pod čarou, neboť si pro naše účely vystačíme s prvním vyjádřením schodové plochy.

¹Řídicí křivkou bude šroubovice s vektorovým vyjádřením $\mathbf{k}(t) = (a \cos t, a \sin t, v_0 t)$.

3.1.3 Praktické využití plochy

1. architektura:

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha je využívána především v architektuře a to při stavbě točitých schodišť, jak bylo zmíněno výše. Tato plocha je tvořena hranami jednotlivých schodů. Jedná se pouze o některé polohy tvořící přímky, které budeme nazývat schodnice.



Obrázek 3.3: Schodiště rozhledna Kramolín



Obrázek 3.4: Archimédův šroub

Protože jednotlivé schodnice jsou ve vodorovné poloze, jsou také kolmé na středový opěrný sloup schodiště, který je zároveň osou šroubového pohybu. Na obr. 3.3 je železné točité schodiště rozhledny *Stezka mezi korunami stromů* na šumavském Kramolíně. Příklad využití pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy jako schodiště čerpán z [1].

2. šroubové dopravníky:

Dále je plocha využívána u šroubových dopravníků. Typickým příkladem je tzv. *Archimédův šroub*. Tento vynález je založen na následujícím principu. Šroubový mechanismus je často uložen v korytě či rouři a šroubová plocha je těsně spojena s otáčející se hřídelí. Archimédův šroub na obr. 3.4.

Hodnota v_0 vyjadřuje redukovanou výšku závitů a parametr t je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Řídicí přímkou, označme ji a , bude souřadnicová osa z s vektorovým vyjádřením $\mathbf{a}(t) = (0, 0, v_0 t)$. Povrchové přímky jsou kolmé na osu šroubovice, proto řídicí rovinou bude rovina xy . Směrový vektor těchto povrchových přímek vypočítáme jako $\mathbf{s} = \mathbf{k}(t) - \mathbf{a}(t)$. Konečné vektorové vyjádření šroubového konoidu pak vyjádříme vztahem $\mathbf{P}(u, t) = (u \cdot a \cos t, u \cdot a \sin t, v_0 t)$, kde parametr u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Otáčením tohoto šneku se provádí samotné čerpání - nejčastěji kapaliny. V kapsách, které tvoří závity, je tato kapalina držena gravitační silou a vynášena do výšky. Výhodami tohoto stroje je jednoduchost a spolehlivost.

Je využíván například v čističkách odpadních vod při čerpání znečištěné kapaliny nebo například k přepravě zrní uvnitř kombajnu. Dříve byl Archimédův šroub využíván i na lodích, kde sloužil k odčerpávání vody zpět do moře.

Plochou Archimédova šroubu by mohla býti i jiná šroubová plocha. Například použitím hadice, kterou bychom navinuli na libovolný válec, bychom pracovali s Archimédovou serpentinou. Nejčastěji se však používá právě pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha především kvůli možnosti snadnější výroby. Více informací o dopravnících lze nalézt v [9].

3. technika:

Dále se s pravoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochou setkáváme u stavební techniky například u zemních vrtáků, kde díky této ploše dochází k rovnoměrnému vrtání do země, a proto nedochází ke zborcení stěn kolem vrtné díry.

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha je využívána také u zemědělské a zahradní techniky. Patří sem například půdní jamkovač využívaný pro sadbu nových stromků nebo pro stavbu plotu, žací lišty kombajnu, které zajišťují rovnoměrný tok klasů do šnekového dopravníku, čímž dochází k malému poškozování zrn.

Tuto plochu nalezneme také na závitech šroubů a šroubových zvedáků, u kruhových nájezdů do patrových garáží, či ventilátorů, jehož lopatky jsou částmi pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy. Příklady využití čerpány z [2].

3.1.4 Pracovní list

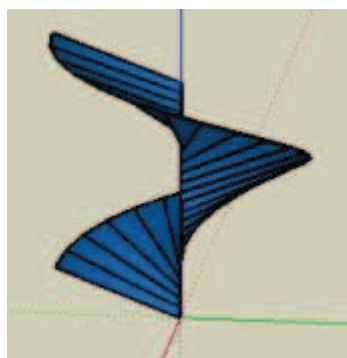
Pro šroubové plochy byl vytvořen pracovní list - šroubové plochy, do kterého byl vložen blok týkající se pravoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy. V úvodní části žáci vyplňují své odpovědi na otázky, které mají shrnout probranou látku a prověřit znalosti žáků i s využitím počítače a internetu.

V následující části žáci během výuky konstruují v prvním příkladu pomocí axonometrie pravoúhlo uzavřenou přímkovou šroubovou plochu. Ve druhém příkladu mají vybrat správnou odpověď na základě znalostí z probrané látky a mají své rozhodnutí zdůvodnit.

V poslední části věnované této ploše mají žáci úkoly zadané jako samostatnou práci na doma. Hledají správné tvrzení o schodové ploše. Dále mají zkonstruovat plochu tentokrát v Mongeově promítání. Poslední příklad byl přidán, aby mohli žáci porovnat rozdíly v obou využitých projekcích (Mongeovo promítání, axonometrie).

3.2 Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha

3.2.1 Zařazení plochy



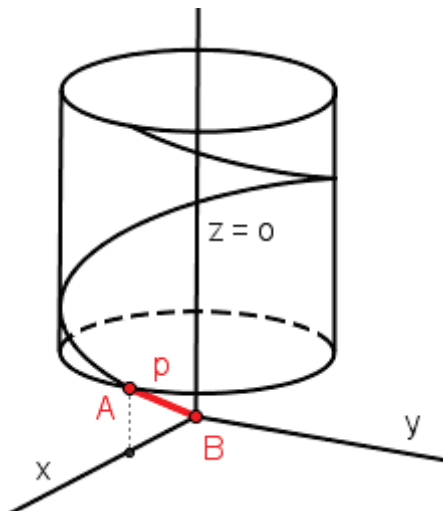
Obrázek 3.5: Model kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy

Jak napovídá název, jedná se opět o přímkovou šroubovou plochu. Někdy se jí též říká tzv. *vývrtková plocha*. Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha je určena prvky šroubového pohybu (osou, redukovanou výškou závitů, směrem vinutí) a dále tvořící přímkou p , která je různoběžná s osou o .

Tvořící přímka opět v každé své poloze protíná osu a dále platí, že přímky o a p na sebe nesmí být kolmé, protože by pak vznikla pravoúhlá uzavřená

přímková šroubová plocha, které jsme se věnovali v předešlé kapitole. Model kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy je na obr. 3.5.

3.2.2 Matematické odvození plochy



Obrázek 3.6: Princip odvození kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy

Vyjdeme z obr. 3.6. Je zadána tvořící křivka, kterou je v případě vývrtkové plochy přímka p . Tato přímka je dána body A a B , jejichž souřadnice jsou $A = [a, 0, c]$, $B = [0, 0, 0]$. Hodnoty a , c jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . Dále platí, že $a \neq 0$ a zároveň $c \neq 0$, jinak by nevznikla vývrtková plocha.

Přímka p tedy protíná osu šroubového pohybu o v bodě B . Osu o jsme ztotožnili se souřadnicovou osou z . Pro směrový vektor tvořící přímky p využijeme analytické geometrie a vyjádříme ho ve tvaru (3.6).

$$\mathbf{s} = A - B = (a, 0, c) \quad (3.6)$$

Dále vyjdeme z parametrického vyjádření přímky a tvořící křivku (přímku) zapíšeme ve tvaru (3.7), kde parametr t je z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{k}(t) = B + \mathbf{s}t = (at, 0, ct) \quad (3.7)$$

Každý bod tvořící křivky koná šroubový pohyb. Ten je složen z rotačního pohybu kolem osy o a zároveň z posuvného pohybu ve směru osy o . Rotační pohyb probíhá v rovinách rovnoběžných s rovinou xy a jednotlivé body se pohybují po rovnoběžkových kružnicích. Pro poloměr R těchto rovnoběžkových kružnic platí vztah (3.8).

$$R = x(t) = |at| \quad (3.8)$$

Ve směru osy z je realizováno posunutí o výšku $v = v_0 u$, kde parametru u je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Spojením rotačního a posuvného pohybu vyjádříme vývrtkovou plochu vztahem (3.9).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (R \cos u, R \sin u, z(t) + v) \quad (3.9)$$

Za poloměr R dosadíme ze vztahu (3.8). Složka $z(t)$ je z vektorového vyjádření tvořící křivky. Nakonec dosadíme výšku v , o kterou se přímka při daném otočení posune podél osy o . Po úpravě získáme výsledné vektorové vyjádření kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy (3.10).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = (|at| \cos u, |at| \sin u, ct + v_0 u) \quad (3.10)$$

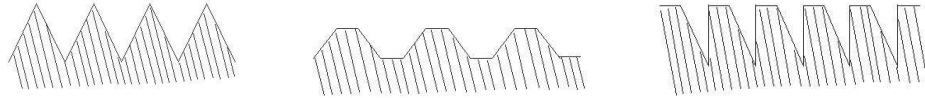
3.2.3 Praktické využití plochy

1. strojírenství:

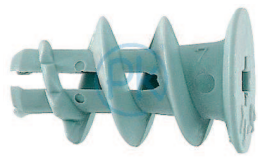
Plocha má využití především ve strojírenství a to u závitů šroubů. Šrouby obecně se dělí na šrouby pohybové a spojovací (upevňovací). Osový řez (profil) šroubů může být tvořen spojením několika rovno-ramenných trojúhelníků nebo lichoběžníků, viz obr. 3.7. V obou dvou případech jsou závity šroubů tvořeny částmi vývrtkových ploch. Příkladem využití kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy u závitů jsou tzv. *šrouby či hmoždinky s ostrým závitem*, které mají trojúhelníkový profil. Hmoždinku s ostrým závitem máme na obr. 3.8. Více o závitech šroubů viz [8].

Dále se s touto plochou setkáme u řady vrtáků, u nichž šikmé zuby zajišťují maximální rychlost vrtání. Dále při obrábění kovů se s ní setkáváme například u tzv. *válcových fréz*, viz obr. 3.9.

Jedná se o obráběcí nástroj s několika břity, který se upíná do obráběcího stroje. Tento stroj se nazývá *frézka*. Frézky jsou využívány nejen pro obrábění kovových materiálů, ale například i dřeva či umělé hmoty. Frézy



Obrázek 3.7: Různé typy osových řezů šroubů



Obrázek 3.8:
Hmoždinka s os-
trým závitem



Obrázek 3.9: Válcová fréza



Obrázek 3.10:
Kovová špona
po obrábění

se dělí například podle způsobu upnutí do stroje, podle obráběného materiálu, ale i podle mnoha jiných kritérií.

Válcové frézy jsou výhodné v tom, že při obrábění zabírá více zubů najednou a zároveň se obrábí větší plocha. Tvar kosouhlé uzavřené přímkové šroubové plochy má nejen tento nástroj, ale následně i přebytečný materiál, který se z obrobku odstraňuje v podobě kovových špon, viz obr. 3.10.

2. vývrtka:

První vývrtky se objevily již v 17. století. Výrobce se nechal inspirovat podobným nástrojem, který sloužil k vyndávání kulek ze zbraní. O sto let později se tvar výrobku zdokonalil tak, že již připomínal dnešní vývrtky.

Dříve vývrtka sloužila jako otvírák lahviček s parfémů či léky. Také bylo vyráběno pivo ve velkém množství a prodáváno bylo v lahvích se zátkami, k jejichž otevírání také sloužila vývrtka. Na otevírání lahví s vínem, se začala používat až někdy během 19. století, kdy dřevěné sudy na trhu postupem času vystřídaly lahve. Na obr. 3.11 je ukázka klasické vývrtky. Čerpáno z [2] a [17].



Obrázek 3.11: Vývrtka na víno



Obrázek 3.12: Točité schodiště v Louvre

3. architektura:

Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha má uplatnění i ve stavitelství. Na obr. 3.12 vidíme točité schodiště v galerii Louvre v Paříži, které je umístěno v místě pod prosklenou pyramidou. Hrany schodů vytváří klasickou pravoúhlu uzavřenou přímkovou šroubovou plochu, o které jsme se zmínili v kapitole (3.1). Avšak oplechování spodní strany schodiště tvoří vývrtkovou plochu. Ta zde plní pouze funkci designérskou a nikoliv funkční.

3.2.4 Pracovní list

Do pracovního listu o šroubových plochách je opět zahrnut blok s otázkami a příklady týkající se kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy. V úvodu opět žáci odpovídají na několik otázek, díky kterým si shrnou a zopakují znalosti o vývrtkové ploše.

Ve druhé části mají žáci během výuky konstruovat řez kosoúhlé uzavřené přímkové šroubové plochy rovinou kolmou na osu šroubového pohybu. V dalším příkladě mají žáci na základě znalostí určit správnou možnost a následně mají zdůvodnit své rozhodnutí.

V poslední části, která je zaměřena opět na samostatnou práci, mají žáci vysvětlit rozdíly mezi „schodovou“ plochou a „vývrtkovou“ plochou. Dále mají načrtnout jejich obrázky. V následujícím příkladě sestavují žáci ostrý závit šroubu jehož trojúhelníkový profil je složený ze dvou úseček. Obě tyto úsečky konají šroubový pohyb a vytváří vývrtkovou plochu. Žáci konstruují příklad v Mongeově promítání.

3.3 Archimedova serpentina

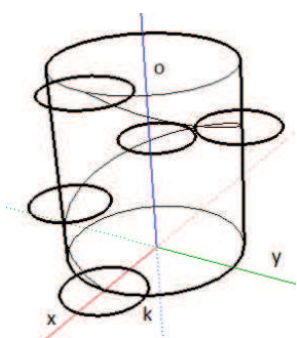
3.3.1 Cyklické šroubové plochy

Doposud jsme se zabývali šroubovými plochami, které vznikaly šroubovým pohybem přímky. Proto se jednalo o přímkové šroubové plochy. V kapitole (1.3) jsme však zavedli, že vzhledem k typu tvořící křivky budeme rozlišovat ještě tzv. *cyklické šroubové plochy*.

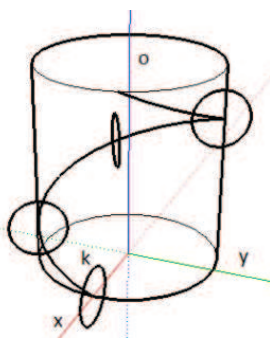
U cyklických šroubových ploch je tvořící křivkou kružnice. Stejně jako jsme u přímkových šroubových ploch rozlišovali jednotlivé plochy podle umístění tvořící přímky, tak i u cyklických šroubových ploch budeme konkrétní plochy určovat podle polohy tvořící kružnice. Budeme rozlišovat tři základní typy cyklických šroubových ploch.

- Normálová cyklická šroubová plocha neboli vinutý sloupek
- Osová cyklická šroubová plocha
- Archimédova serpentina

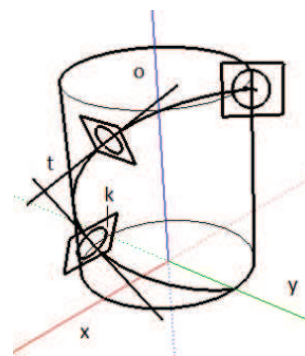
Vinutý sloupek vzniká šroubovým pohybem kružnice k , která leží v rovině ρ kolmé na osu šroubového pohybu o . Střed S tvořící kružnice k neleží na ose šroubového pohybu o , jinak by vznikla rotační válcová plocha. Princip vzniku vinutého sloupku je na obr. 3.13, ve kterém je vyznačeno několik poloh tvořící kružnice.



Obrázek 3.13: Vinutý sloupek



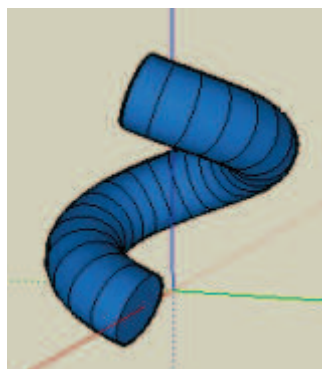
Obrázek 3.14: Osová cyklická



Obrázek 3.15: Archimédova serpentina

Osová cyklická šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem tvořící kružnice, která leží v rovině procházející osou šroubového pohybu. Střed tvořící kružnice opět neleží na ose šroubového pohybu. Princip vzniku osově cyklické šroubové plochy je na obr. 3.14, ve kterém je vyznačeno opět několik poloh tvořící kružnice.

Archimédova serpentina vzniká šroubovým pohybem tvořící kružnice ležící v rovině ρ kolmé k tečně šroubovice, kterou opisuje střed tvořící kružnice. Střed tvořící kružnice neleží na ose šroubového pohybu. Princip vzniku je na obr. 3.15, ve kterém je vyznačeno opět několik poloh tvořící kružnice. Archimédova serpentina může však vznikat i jako *obalová plocha*.² Zaměříme se na plochu Archimédovy serpentiny, protože má několik zajímavých využití. Model plochy máme na obr. 3.16.



Obrázek 3.16: Model plochy Archimédovy serpentiny

3.3.2 Matematické odvození plochy

Matematické odvození Archimédovy serpentiny je poněkud složité pro žáky středních škol, proto zde jen zhruba nastíníme postup a pro zájemce přidáme celé odvození na vytvořených webových stránkách.

²Tvořící plochou je kulová plocha, která koná šroubový pohyb. Archimédova serpentina je zde obalovou plochou jednoparametrického systému kulových ploch a její charakteristikou je kružnice.

Vyjdeme z vektorového vyjádření šroubovice (3.11). Šroubový pohyb je spojením rotačního a posuvného pohybu. Souřadnice x a y určují rotační pohyb tvořící kružnice k kolem osy o a souřadnice z udává, o jakou výšku se tvořící kružnice k posune ve směru osy o .

$$\mathbf{P}(t) = (a \cos t, a \sin t, v_0 t) \quad (3.11)$$

Pro určení roviny, ve které leží tvořící kružnice k využijeme vektory hlavní normály a binormály.³

Po všech potřebných úpravách bychom dospěli k vektorovému vyjádření (3.12) plochy Archimédovy serpentiny. Pro jeho délku a pro přehlednost jsme využili sloupcový zápis vektoru.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, t) = \begin{pmatrix} a \cos t + R \cos u \cos t + Rv_0 \sin u \sin t \frac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}}, \\ a \sin t + R \cos u \sin t - Rv_0 \sin u \cos t \frac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}}, \\ v_0 t + Ra \sin u \frac{1}{\sqrt{a^2+v_0^2}} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.3.3 Praktické využití plochy

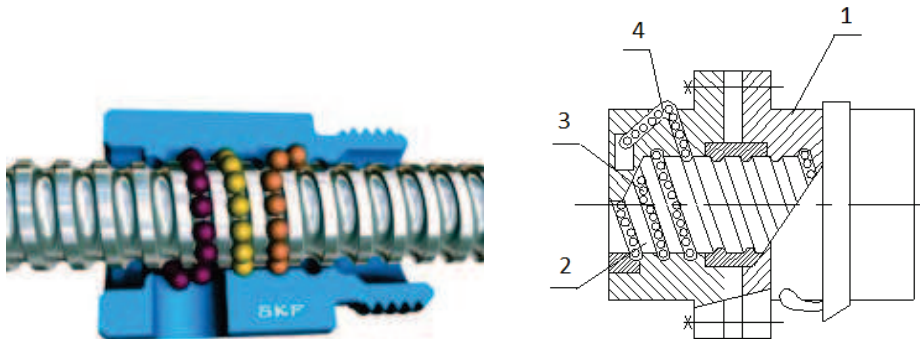
1. kuličkový šroub:

Archimédova serpentina má uplatnění především ve strojírenství. Využívají ji tzv. *kuličkové šrouby*. Tyto šrouby jsou jedním z konstrukčních prvků pohybových ústrojí a jejich úkolem je převádět rotační pohyb na pohyb přímočarý. Pro snadnější představu uvádíme obr. 3.17. Základními částmi tohoto šroubu je hřídel (2) a matice (1). Po celé délce hřídele a uvnitř matice je vysoustružená šroubová drážka (3).

Drážka na hřídeli plní funkci vnitřní oběžné dráhy a drážka v matici vnější oběžnou dráhu. V tomto *kanálku* se odvalují přesné ocelové kuličky o stejném průměru.

Pohybem v drážce mezi hřídelí a maticí vyvolávají lineární pohyb hřídele či matice v závislosti na tom, jaké požadavky aplikace má. Toto řešení zajišťuje minimální mechanické opotřebení a spolehlivou funkci po celou dobu trvanlivosti šroubu.

³Trojice tečna, hlavní normála a binormála určují tzv. Frenetův trojhran



Obrázek 3.17: Řez maticí kuličkového šroubu

Jedním z nepostradatelných dílů každého kuličkového šroubu je také zařízení, které vrací kuličky, jež dosáhly konce oběžné dráhy uvnitř matice, opět na začátek dráhy a zajišťuje tak jejich opakovaný oběh. Zpravidla je k tomuto účelu určena vnější vratná trubka, která spojuje konec matice s jejím začátkem a tím uzavírá okruh obíhajících kuliček.

Kvůli možnému poškození při montáži se však v současné době pracuje na alternativním řešení. Dnes bychom se mohli tedy setkat s tím, že přímo v matici bude vyvrtaná drážka, díky které kuličky neopustí prostor matice a která zajišťuje stálý oběh kuliček (4). Více informací o kuličkových šroubech, viz [8].

2. pružiny:

Ve strojírenství se tento mechanický spojovací prvek využívá především k tlumení nárazů a kmitů. Budou nás zajímat pouze válcové pružiny. Rozdělují se podle toho, jak jsou namáhány (tažné nebo tlačné).

Charakteristickou vlastností této strojní součástky je tzv. *tuhost pružiny*. Jedná se o konstantu vyjadřující sílu potřebnou k vychýlení pružiny z klidového stavu.

K výrobě pružin je využívána speciální pérová ocel, která speciálními úpravami získá požadované vlastnosti (pevnost a pružnost). Zmíněnou úpravou může být například zušlechťování oceli kalením. Pružinky z tenkých drátků se mohou již za studena vinout z kalené struny, ale silné pružiny se zušlechťují až v konečném stavu.

Dráty, ze kterých jsou pružiny navíjeny, mají konstantní poloměr. Nikde nedochází k deformaci tohoto poloměru, proto se jedná o Archimédovu serpentinu.



Obrázek 3.18: Pružina tlumiče



Obrázek 3.19:
Stezka korunami
stromů - Kramolín

Tyto součástky se řídí normami ČSN, tudíž je nalezneme ve strojnických tabulkách. Ty obsahují nejen jejich rozdělení a příslušné rozměry, ale i způsob jejich zakreslování do výkresů včetně potřebných vzorců pro výpočty například tuhosti pružiny, deformace, počtu vinutí atd.

S pružinami se můžeme setkat u různých zařízeních. Jmenujme například tlumiče u dopravních prostředků, vratné pružiny u zbraní, cvičební pomůcky atd. Každodenně se ale s pružinami setkáváme u obyčejných věcí jako jsou propisovací tužky, kolíky na prádlo, pastičky na myši, spony do vlasů a u mnoha dalších. Pro tento příklad bylo čerpáno opět z [8].

3. skluzavky:

S plochou Archimédovy serpentiny se setkáváme u různých skluzavek a toboganů v aquaparcích či dětských hřištích. Jak už jsme zmínili plocha vzniká šroubováním kružnice, která leží v rovině kolmé k tečně šroubovice.

Jedna taková skluzavka vznikla v rámci nové stezky v korunách stromů na Kramolíně. Jedná se o konstrukci rozhledny s terasami vinoucími se

až nad koruny stromů. Podoba této rozhledny je na obr. 3.19. Můžeme si všimnout, že tato rozhledna obsahuje hned několik šroubových ploch, my se však prozatím zaměříme pouze na skluzavku - Archimédovu serpentinu.

Tato skluzavka slouží jako zkratka pro ty, kteří nechtějí absolvovat stejnou cestu i nazpět a chtějí zároveň zažít nějaké zpestření. Skluzavka je totiž poněkud strmá. Pro příklad využití plochy jako různých skluzů byla inspirace čerpána z [1].

3.3.4 Pracovní list

Pro procvičení a upevnění znalostí týkající se cyklických šroubových ploch jsme v pracovním listě o šroubových plochách přidali poslední blok. V úvodní části žáci doplňují správné odpovědi na otázky, které slouží ke shrnutí látky.

Druhá část pracovního listu je zaměřena na práci žáků během výuky. V prvním příkladu žáci konstruují několik bodů hlavního meridiánu Archimédovy serpentiny. Ve druhém příkladu mají žáci za úkol načrtnout obrázek na základě svých znalostí o této ploše. V posledním příkladu této části, opět konstruují body hlavního meridiánu avšak jiné cyklické šroubové plochy a to vinutého sloupku. Celé meridiány jsou žákům k dispozici v programu Geogebra.

Třetí a zároveň poslední část je zaměřená na samostatnou práci žáků. Vybírají správnou tvrzení o Archimédově serpentíně a v posledním příkladu již sami sestavují body řezu osově cyklické šroubové plochy rovinou kolmou k ose šroubového pohybu.

Byly tedy vyřešeny tři příklady na různé cyklické plochy. Žáci si mohli povšimnout, že meridián Archimédovy serpentiny byla jiná křivka než meridián vinutého sloupku. Hlavní meridián šroubové plochy se tedy mění v závislosti na poloze tvořící křivky.

Kapitola 4

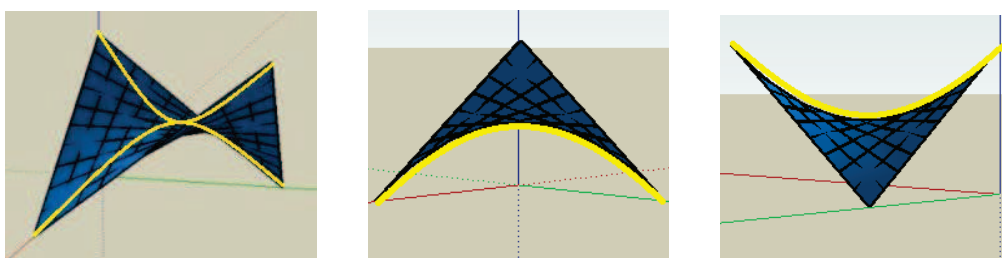
Vybrané zborcené plochy

V následující kapitole navážeme na kapitolu (1.4) a budeme se věnovat vybraným zborceným plochám. Do této skupiny jsme zařadili hyperbolický paraboloid, přímý parabolický konoid a přímý vlnový konoid.

U každé plochy opět uvedeme, jakým způsobem vzniká. Dále provedeme matematické odvození plochy a uvedeme příklady využití plochy v praxi. Na závěr jednotlivých podkapitol přidáme pracovní list týkající se dané plochy spolu s modelem plochy. Řešení příkladů z pracovního listu budou následně k dispozici na přiložených webových stránkách opět z programu Geogebra.

4.1 Hyperbolický paraboloid

4.1.1 Zařazení plochy



Obrázek 4.1: Hyperbolický paraboloid a dvě vyznačené paraboly

Plochu hyperbolického paraboloidu lze zařadit do tzv. *translačních ploch*.

Jinými slovy, budeme-li mít dvě hlavní paraboly, pak plochu hyperbolického paraboloidu vytvoříme tak, že vrchol jedné z parabol budeme posouvat po trajektorii paraboly druhé.

Tyto dvě paraboly se rozevírají na opačné strany (například první parabola $z = ax^2 + bx + c$ a druhá parabola $z = -dy^2 + ey + f$). Na obr. 4.1 uvádíme model hyperbolického paraboloidu s vyznačenými hlavními parabolami. Jelikož tvar plochy připomíná jezdecké sedlo, někdy se jí též říká *plocha sedlová*.

V případě, že budeme hyperbolický paraboloid řadit mezi zborcené plochy, konkrétně mezi konoidy, bude tato plocha určena třemi řídicími prvky. Řídicí křivkou bude u hyperbolického paraboloidu přímka k . Řídicí přímkou bude přímka l . Pro přímky k a l platí, že jsou vzájemně mimoběžné. Řídicí rovinou α bude rovina kolmá k řídicí přímce l .

Pro povrchové přímky p platí, že jsou rovnoběžné s řídicí rovinou α a dále jsou všechny povrchové přímky příčkami daných mimoběžek k , l . Každá povrchová přímka tedy spojuje body na řídicí křivce k s body na řídicí přímce l . Na ploše existují dva reguly přímek. V každém tomto regulu budou zmíněné přímky mimoběžky. Přímka z jednoho regulu protíná všechny přímky regulu druhého.

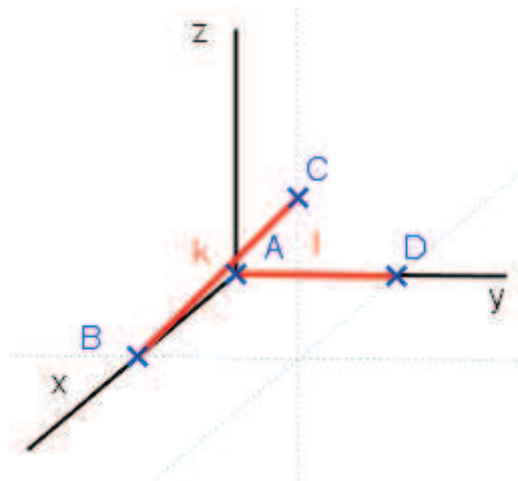
My budeme zadávat plochu hyperbolického paraboloidu pomocí zborceného čtyřúhelníku $ABCD$. Pro zborcený čtyřúhelník platí, že jeho vrcholy neleží v jedné rovině. Protože povrchové přímky obou regulů jsou rovnoběžné s řídicími rovinami, musí být zachováno, že zborcený čtyřúhelník se do půdorysu, nárysu či bokorysu promítá jako rovnoběžník.

Dále zdefinujeme osu hyperbolického paraboloidu o , jako přímku rovnoběžnou s průsečnicí řídicích rovin a procházející vrcholem plochy V . Vrchol plochy je dán průsečíkem přímek procházejících středy protějších stran čtyřúhelníku. Také platí, že tečná rovina, procházející vrcholem plochy, je kolmá na osu plochy.

4.1.2 Matematické odvození plochy

Hyperbolický paraboloid je speciální typ konoidu, jak již bylo řečeno výše. Konoidy jsou určeny třemi prvky a v případě hyperbolického paraboloidu se jedná o dvě přímky a řídicí rovinu.

Mějme zadán zborcený čtyřúhelník s vrcholy A , B , C , D podle obr. 4.2. Souřadnice těchto bodů jsou následující $A = [0, 0, 0]$, $B = [a, 0, 0]$, $C = [a,$



Obrázek 4.2: Princip odvození hyperbolického paraboloidu

$b, c]$, $D = [0, b, 0]$. Hodnoty a, b, c jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} . Pro tyto hodnoty dále platí, že $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $c \neq 0$.

Tyto čtyři body určují dvě řídicí přímky. Body B, C určují řídicí přímku k a body A, D určují řídicí přímku l . Platí, že přímky k a l jsou navzájem mimoběžné.

Pro směrový vektor přímek využijeme vztah z analytické geometrie, tedy pro přímku k vyjádříme směrový vektor q , viz vztah (4.1) a směrový vektor přímky l označíme s , viz (4.2).

$$\mathbf{q} = C - B = (0, b, c) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{s} = D - A = (0, b, 0) \quad (4.2)$$

Dále vyjdeme z parametrického vyjádření přímky v analytické geometrii a přímky k, l mají vektorová vyjádření (4.3) a (4.4). Parametr t je z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{k}(t) = B + \mathbf{q}t = (a, bt, ct) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{l}(t) = A + \mathbf{s}t = (0, bt, 0) \quad (4.4)$$

Povrchové přímky p hyperbolického paraboloidu vyjádříme jako spojnice všech bodů X, Y . Bod X se bude pohybovat po přímce k a bod Y po přímce

l . Pro směrový vektor h povrchových přímk p platí vztah (4.5).

$$\mathbf{h} = \mathbf{k}(\mathbf{t}) - \mathbf{l}(\mathbf{t}) = (a, 0, ct) \quad (4.5)$$

Hyperbolický paraboloid je množinou všech povrchových přímk p , proto můžeme plochu vyjádřit ve tvaru (4.6). Parametr u je opět z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = \mathbf{l}(\mathbf{t}) + \mathbf{h}u \quad (4.6)$$

Pokud dosadíme do vztahu (4.6) za vektorové vyjádření přímky l a směrový vektor h , po úpravě získáme konečné vektorové vyjádření hyperbolického paraboloidu (4.7).

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}, \mathbf{t}) = (au, bt, ctu) \quad (4.7)$$

4.1.3 Praktické využití plochy

1. zastřešování budov:



Obrázek 4.3: Kostel Neposkvrněného početí Panny Marie

V moderní architektuře se plocha hyperbolického paraboloidu využívá především u zastřešování různých budov. Příkladem je kostel ve státě Colorado ve městě Boulder, katedrála svaté Marie v San Francisku a dokonce i stejnojmenná katedrála s podobným vzhledem v Tokiu. V České republice má také zastoupení a to na Moravě ve městě Břeclav u kostela sv. Václava nebo např. v Praze Strašnicích u kostela Neposkvrněného početí Panny Marie, viz obr. 4.4. Na stejném obrázku vpravo



Obrázek 4.4: Půdorys budovy a vnitřní prostory chrámu

jsou červeně vyznačené tři přímky z každého regulu hyperbolického paraboloidu.

Nejenže tento kostel vyrostl uprostřed pražského sídliště, ale je zajímavý také svou moderní architekturou. Celá budova připomíná čtyřboký jehlan, přičemž vnitřní chrám zaujímá polovinu celé budovy. Má tedy půdorys připomínající rovnoramenný trojúhelník. Tuto konstrukci navrhl architekt Jindřich Synek.

Pro stavbu využil hlavní dřevěný sloup, na který jsou připevněny další čtyři vazné sloupy. Ty vymezují čtyři plochy, z nichž tři využívají hyperbolický paraboloid a čtvrtá je prosklená, a tím tedy prosvětluje vnitřní prostory. Moderní interiér na návštěvníky působí jako otevřený a vzdušný prostor. Více informací o kostelu v Praze - Strašnicích lze nalézt v [18].

2. drobná architektura:



Obrázek 4.5: Nástupiště autobusového nádraží České Budějovice

Plochu hyperbolického paraboloidu nalezneme také u jednoduchých staveb jako jsou přístřešky, sochy, altány nebo nástupiště. Typickým příkladem je autobusové nádraží v Českých Budějovicích.

Je postaveno na střeše nákupního centra Mercury. Na stavbě se podílela skupina architektů ze společnosti Atelier 8000, přičemž hlavním projektovým managerem je Ladislav Kratochvíl.

Po obou stranách odbavovací budovy jsou nad jednotlivými nástupišti jednoduché přístavby s membránovým zastřešením. Jednotlivé markýzy jsou tvořeny ocelovými tyčemi s různým sklonem, na které je připevněna bílá membrána, jejíž vnější okraj připomíná lomenou čáru.

Jednotlivá pole membrány mají obdélníkový půdorys. Jsou na vrchní i spodní straně napnutá ocelovými lany a vytváří tak plochu hyperbolického paraboloidu. Jedná se o nejrozsáhlejší provedení tohoto typu zastřešení nástupišť v celé České republice.

Na obr. 4.5 jsou fotografie autobusového nádraží s detailními záběry na ukotvení jednotlivých polí membrány. Pro příklad využití hyperbolického paraboloidu jako zastřešení nástupišť bylo čerpáno z [20].

4.1.4 Pracovní list

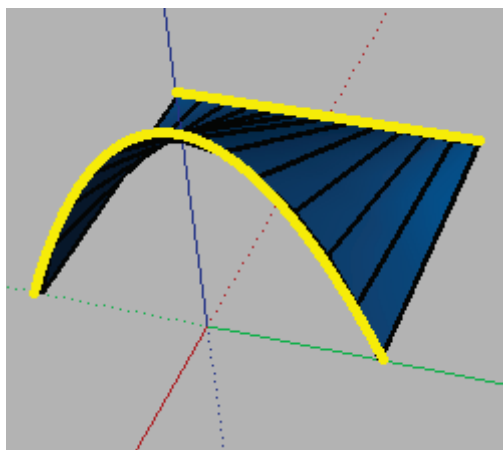
Opět jako pro rotační a šroubové plochy jsme i pro zborcené plochy vytvořili pracovní list, jehož jedna část je zaměřena na plochu hyperbolického paraboloidu. V úvodní části jsou shrnující otázky zaměřené na základní poznatky o ploše hyperbolického paraboloidu.

Prostřední část je zaměřena stejně jako u předchozích pracovních listů na příklady, které žáci plní během výuky pod dohledem vyučujícího. V prvním příkladu si žáci připomenou analytickou geometrii v prostoru, konkrétně u parametrického vyjádření přímky v prostoru. Ve druhém příkladě žáci vybírají správnou odpověď z nabídnutých možností na základě svých nově nabytých znalostí. Třetí příklad je na konstrukci povrchových přímek hyperbolického paraboloidu. Následuje několik otázek týkajících se řezu hyperbolického paraboloidu.

V poslední části, podobně jako u jiných ploch, jsou příklady věnované samostatné práci žáků a příkladům analogickým těm, které byly předvedené ve škole s malou modifikací. V prvním příkladě tedy žáci již sami konstruují povrchové přímky plochy. Ve druhé úloze konstruují řez hyperbolického paraboloidu a třetí příklad je zaměřen na výběr správné možnosti.

4.2 Přímý parabolický konoid

4.2.1 Zařazení plochy



Obrázek 4.6: Model přímého parabolického konoidu

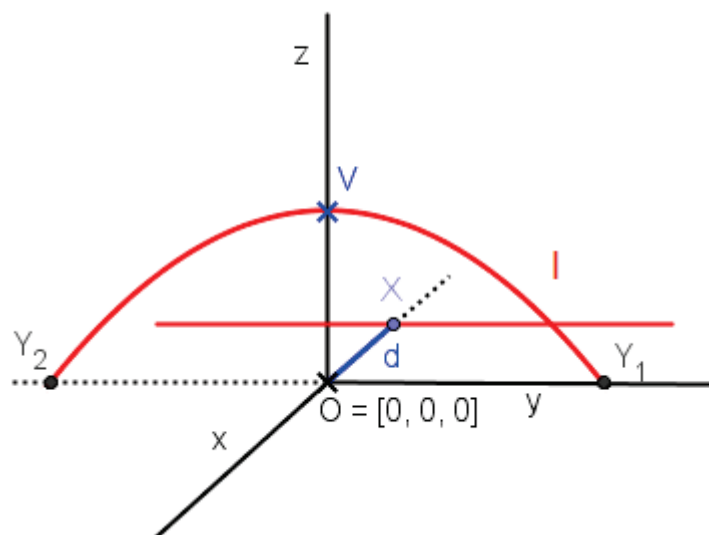
Přímý parabolický konoid řadíme mezi zborcené plochy. Jedná se o přímkovou plochu, která je určena třemi prvky. Jsou jimi řídicí přímka, řídicí křivka, kterou je parabola a poslední je řídicí rovina.

Jelikož se jedná o přímý konoid, řídicí přímka je kolmá na řídicí rovinu. Plocha je tvořena povrchovými přímkami rovnoběžnými s řídicí rovinou a protínajícími obě řídicí křivky. Pro představu uvádíme model přímého parabolického konoidu na obr. 4.6.

Řídicí parabola leží v rovině yz , řídicí přímka leží v rovině xy nebo v rovině s ní rovnoběžné a je kolmá na řídicí rovinu xz . Na tomto obrázku je pouze polovina plochy, druhá polovina by byla osově souměrná podle řídicí přímky. Jinými slovy, dospěli bychom k ní tak, že bychom površky plochy prodloužili za řídicí přímku.

4.2.2 Matematické odvození plochy

Vyjdeme z obr. 4.7. Mějme zadánu řídicí křivku, kterou je parabola ležící v rovině yz . Vrchol paraboly V leží na souřadnicové ose z a jeho souřadnice jsou $V = [0, 0, c]$. Hodnota konstanty c je z oboru reálných čísel \mathbf{R} .



Obrázek 4.7: Princip odvození přímého parabolického konoidu

Dále mějme dānu řídící přímku l ležící v rovině xy , která je rovnoběžná se souřadnicovou osou y . Vzdálenost řídící přímky l od roviny paraboly označíme d . Hodnota konstanty d je z oboru reálných čísel \mathbf{R} a zároveň platí, že $d \neq 0$, aby vznikl parabolický konoid.

Vyjdeme z definice kvadratické funkce $z = -ay^2 + c$, kde hodnoty a , c jsou z oboru reálných čísel \mathbf{R} a zároveň platí, že $a \neq 0$, jinak by nevznikla kvadratická funkce. Hodnota c vyjadřuje pozici vrcholu paraboly na souřadnicové ose z .

Zvolíme parametrizaci $y = t$ a po dosazení do definice kvadratické funkce získáme řídící křivku ve tvaru (4.8). Parametr t je z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{k}(t) = (0, t, -at^2 + c) \quad (4.8)$$

Řídící přímka l leží v rovině xy . Její vzdálenost d od roviny paraboly je zároveň souřadnicí x . Přímka l je rovnoběžná se souřadnicovou osou y , proto platí pro souřadnici y stejnā parametrizace jako pro souřadnici y paraboly. Vektorové vyjádření řídící přímky l budeme tedy vyjadřovat vztahem (4.9). Stále platí, že parametr t je z intervalu $(-\infty, \infty)$ a konstanta d je z oboru

reálných čísel, přičemž platí $d \neq 0$.

$$\mathbf{l}(t) = (d, t, 0) \quad (4.9)$$

Povrchové přímky p přímého parabolického konoidu jsou kolmé na řídicí přímku l a tedy rovnoběžné s rovinou xz . Přímky p jsou vždy spojnice dvou bodů X, Y . Bod X se pohybuje po řídicí parabole k a bod Y po řídicí přímce l . Směrový vektor všech těchto spojníc vyjádříme ve tvaru (4.10).

$$\mathbf{s} = \mathbf{k}(t) - \mathbf{l}(t) = (-d, 0, -at^2 + c) \quad (4.10)$$

Vydeme z parametrizace přímky, ale nejedná se zde pouze o jednu přímku, ale o celý svazek přímek. Vektorové vyjádření plochy parabolického konoidu pak zapisujeme vztahem (4.11).

$$\mathbf{P}(u, t) = \mathbf{l}(t) + su \quad (4.11)$$

Po dosazení do vztahu (4.11) za řídicí přímku l a za směrový vektor s povrchových přímek p získáme konečné vektorové vyjádření přímého parabolického konoidu ve tvaru (4.12). Parametr u je opět z intervalu $(-\infty, \infty)$.

$$\mathbf{P}(u, t) = (d(1 - u), t, (-at^2 + c)u) \quad (4.12)$$

4.2.3 Praktické využití plochy

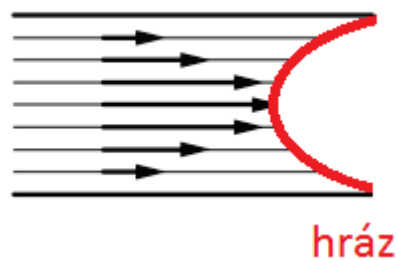
1. zastřešování:

Plocha přímého parabolického konoidu je využívána ve stavitelství. Je možné ji využívat především k zastřešování budov například prostory nad vchody nebo tzv. *pilové střechy* různých hal, kde se za sebou opakují stejné parabolické konoidy. Na obr. 4.8 je plocha přímého parabolického konoidu využita právě k zastřešení. Jedná se o novostavbu rodinného domu ve Starém Dražejově nedaleko města Strakonice (JČ).

Architekt využitím plochy přímého parabolického konoidu oživil jinak obyčejnou valbovou střechu. Použitím této plochy se také rozšířil i vnitřní prostor natolik, že místo klasických střešních oken majitelé mohli využít tzv. *arkýřové okno* s výhledem do krajiny. Využití plochy přímého parabolického konoidu jako zastřešení budov jsme čerpali z [2].



Obrázek 4.8: Přímý parabolický konoid využití v zastřešování budov



Obrázek 4.9: Laminární proudění

2. opěrné zdi:

Dále je plochy přímého parabolického konoidu využíváno také u staveb, kde zdivo odolává velkému tlaku. Můžou jimi být klenbové vodní přehrady. Jejich stěna hráze má půdorys parabolického oblouku. Dále je možné ji využít u skladů sypkých materiálů, jako jsou sila. Plocha tedy plní funkci opěrné zdi, podél které se rovnoměrně rozloží tlak.

U vodních přehrad platí, že v blízkosti hráze přehrady má kapalina malou rychlost a vzniká zde tzv. laminární proudění. Toto proudění je charakteristické tím, že proudnice neboli *trajektorie* částic kapaliny jsou rovnoběžné. Kapalina proudí ve vrstvách tzv. *lamínech*. Vrstva, která se bezprostředně dotýká stěny hráze a břehů, se pohybuje v důsledku tření nejmenší rychlostí (je téměř v klidu).

Po této mezní vrstvě se posouvá druhá vrstva, která má rychlost o něco větší. Po této vrstvě se pohybují zase další a další vrstvy kapaliny s postupně větší a větší rychlostí. Největší rychlost má kapalina, která prochází středem přehrady. Koncové body vektorů rychlosti tak leží na parabolě, viz obr. 4.9. Rychlost se mění také s hloubkou. Čím větší hloubka kapaliny bude, tím pomalejší bude proudění.

Proto se u zdí přehradních hrází využívá plochy parabolického konoidu, která se staví proti proudění vody. To znamená, že parabolický konoid je orientovaný vrcholem řídicí křivky směrem do hráze. Tím se tlak kapaliny rovnoměrně rozprostře podél zdi a nedojde k jejímu provalení.

Tento příklad byl čerpán z [2] a konzultován nezávisle s dvěma odborníky s Ing. Miroslavem Krejčou, Csc. a následně na to s bývalým stavbyvedoucím firmy VHS České Budějovice Jaroslavem Kovandou.



Obrázek 4.10: Přehrada Mooserboden, Rakousko

Na obr. 4.10 máme na ukázkou horskou přehradu Mooserboden ležící nedaleko rakouských měst Kaprun a Zell am See. Tyto dvě uměle vytvořené vodní nádrže jsou součástí komplexu přečerpávací vodní elektrárny. Plní tak funkci uchovávání energie z vodních toků a pochopitelně slouží i k regulaci vody tekoucí z přilehlých vrcholů rakouských alp.

4.2.4 Pracovní list

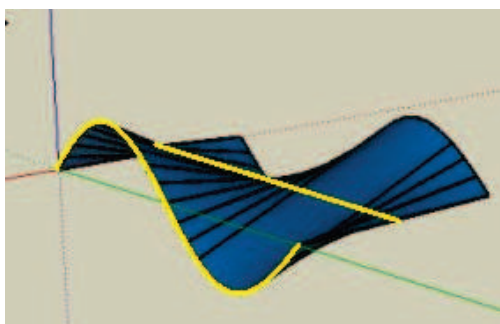
V rámci pracovního listu věnovanému přímkovým plochám si žáci opět na několika otázkách a příkladech zopakují a upevní znalosti týkající se plochy parabolického konoidu. První část je zaměřena pouze na teoretické otázky, u kterých žáci doplňují správné odpovědi. Je zde také jeden úkol na načrtnutí obrázku.

Ve druhé části učitel společně se žáky odvodí parametrické vyjádření plochy na základě přiloženého obrázku a v další úloze se žáci naučí jednoduchou konstrukci konoidů. Je zde přidán také příklad na konstrukci řezu přímého parabolického konoidu, který je napojen na valbovou střechu.

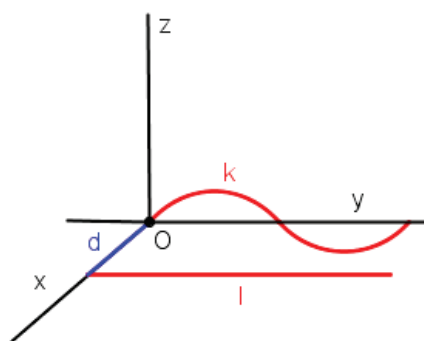
Poslední část je směřována na samostatnou práci žáků. Vybírají například správnou odpověď na otázku na základě svých znalostí a konstruují povrchové přímky přímého parabolického konoidu. Poslední příklad je věnován

konstrukci řezu přímého parabolického konoidu rovinou rovnoběžnou s rovinou paraboly.

4.3 Přímý vlnový konoid



Obrázek 4.11: Model přímého vlnového konoidu



Obrázek 4.12: Princip vytvoření vlnového konoidu

4.3.1 Zařazení a vznik plochy

Přímý vlnový konoid řadíme také mezi zborcené plochy. Plocha je určena třemi prvky, kterými jsou řídicí křivka (sinusoida), řídicí přímka a řídicí rovina.

Řídicí přímka je kolmá na řídicí rovinu, neboť jde opět o přímý konoid. Plochu tvoří povrchové přímky rovnoběžné s řídicí rovinou a protínající obě řídicí křivky. Pro představu uvádíme obr. 4.11, který znázorňuje model přímého vlnového konoidu.

4.3.2 Matematické odvození plochy

Podívejme se na obr. 4.12. Mějme zadánu řídicí křivku k , která leží v rovině yz . Touto křivkou je sinusoida. Nemusí se jednat o základní sinusoidu, ale je možné měnit i její amplitudu a periodu. Řídicí přímka l leží v rovině xy nebo v rovině s ní rovnoběžné. Řídicí rovinou je rovina xz .

Vyjdeme z definice goniometrických funkcí a funkci sinus zapíšeme jako $z = a \sin(by)$. Hodnoty konstant a , b jsou z oboru reálných čísel. Konstanta a mění amplitudu funkce sinus a konstanta b má vliv na periodu funkce sinus.

Zvolíme parametrizaci $y = t$. Po dosazení do předpisu pro funkci sinus a rozepsání do složek získáme vektorové vyjádření řídicí křivky k ve tvaru (4.13). Platí, že parametr t je z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\mathbf{k}(t) = (0, t, a \sin(bt)) \quad (4.13)$$

Řídicí přímka l leží v rovině xy a její vzdálenost od roviny sinusoidy označíme d . Hodnota konstanty d je z oboru reálných čísel \mathbf{R} a zároveň platí $d \neq 0$, jinak by nevznikl přímý vlnový konoid. Vektorové vyjádření řídicí přímky l máme ve vztahu (4.14) a parametr t je ze stejného intervalu jako pro řídicí křivku k .

$$\mathbf{l}(t) = (d, t, 0) \quad (4.14)$$

Povrchové přímky p přímého vlnového konoidu jsou rovnoběžné s rovinou xz , která je kolmá na řídicí přímku l . Jsou to spojnice dvou bodů X , Y . Bod X se pohybuje po řídicí křivce k a bod Y se pohybuje po řídicí přímce l . Směrový vektor těchto spojníc vyjádříme vztahem (4.15).

$$\mathbf{s} = \mathbf{l}(t) - \mathbf{k}(t) = (d, 0, -a \sin(bt)) \quad (4.15)$$

Dále vyjdeme ze vztahu z analytické geometrie a vyjádříme celý systém povrchových přímek, které tvoří plochu přímého vlnového konoidu ve tvaru (4.16). Parametr u je z oboru reálných čísel \mathbf{R} .

$$\mathbf{P}(u, t) = \mathbf{l}(t) + \mathbf{s}u \quad (4.16)$$

Pokud dosadíme do vztahu (4.16) za řídicí přímku l a směrový vektor s , získáme konečné vektorové vyjádření přímého vlnového konoidu ve tvaru (4.17).

$$\mathbf{P}(u, t) = (d(1 + u), t, -au \sin(bt)) \quad (4.17)$$



Obrázek 4.13: Zed' národů, Athény
- Řecko



Obrázek 4.14: Parkovací
dům Rychtářka - Plzeň

4.3.3 Praktické využití plochy

1. design:

Plocha přímého vlnového konoidu má uplatnění především ve stavebním průmyslu z hlediska svého designu. Španělský architekt Santiago Calatrava se nechal inspirovat plochou přímého vlnového konoidu a použil jej u tzv. *Zdi národů*, viz obr. 4.13. Ta byla jednou z mnoha součástí komplexu olympijského sportoviště v Athénách v roce 2004.

V České republice se s touto plochou také můžeme setkat. V Plzni plochu přímého vlnového konoidu připomíná exteriérový design parkovacího domu Rychtářka. Na fasádě budovy jsou v řadách připevněné skleněné panely, které jsou různě skloněné. Pokud bychom vedli vertikální střední příčku skleněným panelem, pak tato příčka bude jednou z povrchových přímek přímého vlnového konoidu. Využití plochy přímého vlnového konoidu bylo inspirováno materiálem [19].

2. zastřešování:

V současné době si majitelé vinic často přeměňují své usedlosti na architektonický skvost. Jedním takovým vinařstvím je Bodegas Ysios, které se nachází na severu Španělska v podhůří Pyrenejí. Architektem reprezentativní budovy byl opět Santiago Calatrava. Jeho úkolem bylo interiér rozdělit na výrobní, sklad a reprezentativní část určenou pro prodej vína.



Obrázek 4.15: Vinařství Bodegas Ysios

Pro tvar střechy opět zvolil přímý vlnový konoid, který ladí s vlnitým reliéfem okolí vinohradu. Je složena z hranatých dřevěných trámů obalených v hliníku, které společně vytváří vlnu. Uprostřed budovy architekt použil vyvýšený oblouk, který plní funkci poznávacího znamení vinice. Nachází se zde návštěvnické centrum a z balkonu lze pozorovat a obdivovat okolí vinice.

Budova je zajímavá nejen vlnící se střechou, ale také vlnitými obvodovými zdmi. Celá stavba se opírá o dvě nosné stěny, které mají sinusovou linii s minimálním počtem oken. Podél jedné této hlavní stěny je vodní plocha, v níž se vlnitá fasáda odráží. Architekturu budovy můžete nalézt na obr. 4.15.

V České republice můžeme opět najít zástupce využití přímého vlnového konoidu na zastřešování. Máme na mysli rekreační středisko Marina na břehu jednoho z přístavů Lipenské přehrady. Jedná se z velké části o holandskou architekturu. Slovo Marina je odvozené z latinského slovo *mare*, což v překladu znamená *moře*.

Architekti názvem tohoto rekreačního střediska zdůraznili fakt, že stojí na břehu Lipenské přehrady. Vlnitým zastřešením areál dokonale ladí s vlnami vodní hladiny i vlnícími se Šumavskými vrcholky. Hřebeny střech jsou vlastní řídicí přímky a konec šindelové střechy má tvar vlny (sinusoidy), která je řídicí křivkou. Proto je zde zřejmě využití přímého vlnového konoidu. Budovy areálu jsou na obr. 4.16. Inspirace čerpána z [19] a [20].



Obrázek 4.16: Rekreační středisko Marina - Lipno

4.3.4 Pracovní list

V pracovním listě na zborčené plochy je přidán závěrečný blok věnovaný přímému vlnovému konoidu. První část je jako u předchozích ploch věnována opakování výkladové části. Žáci opět odpovídají na uvedené otázky.

Následuje část s příklady, na kterých žáci pracují během výuky. První příklad je věnován matematickému popisu plochy. Ve druhém příkladě si mají žáci zopakovat tzv. *Kochanského rektifikaci kružnice* a zkonstruovat periodu sinusoidy nad rozvinutým obvodem kružnice a poslední příklad je věnován konstrukci povrchových přímek přímého vlnového konoidu.

Poslední část je opět zaměřena na samostatnou práci žáků. V prvním příkladě mají žáci za úkol sestrojít plochu přímého vlnového konoidu a následně jeho řez rovinou, která je rovnoběžná s rovinou sinusoidy. Žáci si na příkladu ověří, že řezy rovinou rovnoběžnou s řídicí přímkou jsou opět sinusoidy. Těmto sinusoidám se směrem od řídicí křivky k řídicí přímce postupně zmenšuje amplituda. V posledním příkladu mají žáci vybrat správnou odpověď na otázku.

Kapitola 5

Modely ploch

Pro každou vybranou plochu byl vytvořen buďto virtuální model ve 3D modelářích (Google SketchUp, Rhino) nebo fyzický model, pokud to bylo konstrukčně možné. K tvorbě jsme vybrali následující seznam budov či výrobků, u kterých je využívána daná plocha.

Seznam vybraných modelů:

1. **kulová plocha** - zastřešení nad polovinou budovy Státní opery v Sydney (fyzický model)
2. **anuloid** - kuličkové ložisko (virtuální model)
3. **jednodílný rotační hyperboloid** - rozhledna na Ještědu (virtuální model)
4. **rotační paraboloid** - planetárium Bochum - Německo (virtuální model)
5. **pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha** - domek pro horské kozy (fyzický model)
6. **kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha** - vývrtka (virtuální model)
7. **Archimédova serpentina** - žárovka (virtuální model)
8. **hyperbolický paraboloid** - kostel první evangelické církve - USA (virtuální model)

9. **přímý parabolický konoid** - kostel sv. Marie a sv. Ludvíka - USA
(virtuální model)

10. **přímý vlnový konoid** - střecha soukromého domu - USA (virtuální
model)

Vzhledem k rozsahu práce, jsme se rozhodli, že postupy jednotlivých modelů včetně finálního srovnání modelu s originálem přiložíme na vytvořené webové stránky, viz přiložené CD.

Kapitola 6

Ověření materiálu v praxi

Součástí zadání diplomové práce bylo tento připravený učební materiál vyzkoušet na hodině deskriptivní geometrie. Tento bod zadání mohl být splněn díky kontaktu na vyučujícího Mgr. Petra Zrostlíka, který v současné době externě vyučuje na gymnáziu Mikulášské náměstí v Plzni.

Seminář z deskriptivní geometrie je rozvrhován na dvě vyučovací hodiny pro vybrané žáky tříd 8.A, 8.B, 4.A a 4.B. Vzhledem k tomu, že byl termín na odučení domluven na týden před Vánoci, nebyli přítomni všichni žáci. Někteří žáci měli omluvenou výuku, kvůli speciálnímu programu, který jim před Vánoci zařídil třídní učitel, proto bylo přítomno pouze 11 žáků.

Vybraná část učebního textu včetně pracovního listu byla Mgr. Petrem Zrostlíkem nahrána na školní server Moodle a žáci měli za úkol tento materiál přečíst a přinést si vytištěný pracovní list. Vybrána byla část diplomové práce zaměřená na kulovou plochu. Při výuce byl k dispozici počítač s dataprojektorem a symposium, na kterém bylo možné vyznačovat důležité informace či dokreslovat vysvětlující obrázky.

Pro žáky byla také na úvod hodiny vytvořena prezentace týkající se obecných rotačních ploch a následně konkretizace na kulovou plochu. Začlenili jsme ji do výuky pro shrnutí důležitých pojmů, které si měli žáci sami nastudovat z poskytnutého materiálu. V případě, že tak žáci neučinili, vytvořená prezentace s doprovodným výkladem je dostatečně podrobná k pochopení nové látky. Pro lepší pochopení dané problematiky byl využit i drátěný model kulové plochy, na kterém bylo možné vysvětlit pojem sférického trojúhelníku.

Při vyplňování pracovních listů žáci správně reagovali na položené otázky. Při konstrukčních úlohách žákům velmi pomohlo, že příklady byly vyřešeny v programu Geogebra a jednotlivé kroky konstrukce jim byly promítány.

Během poskytnutých dvou vyučovacích hodin jsme společně s žáky stihli všechny připravené příklady do výuky a samostatné úlohy jsme společně se žáky prošli. Pro konstrukci sférického trojúhelníku byly žákům vysvětleny návodné kroky.

Na závěr hodiny byl žákům rozdán krátký dotazník pro ověření jejich spokojenosti s touto výukou. Mnohým z nich pomohla připravená prezentace s vysvětlujícím výkladem, aby si v hlavně urovnali samostatně nabyté informace z materiálu. Dále byli spokojeni s předpřipravenými pracovními listy, s konstrukcemi v Geogebře a praktickým využitím plochy.

Někteří žáci byli spokojeni s obsahovostí materiálu i se vzrůstající náročností příkladů. Pro některé žáky byly naopak příklady těžké. Především se zde jedná o odvozování vektorového vyjádření, počítání oblouků sférického trojúhelníku a pochopení sférického trojúhelníku vůbec.

Závěr

Cílem diplomové práce na téma *Plochy ve světě kolem nás* bylo vypracovat studijní materiál, který měl obsahovat jak teoretické informace o plochách využívaných v technické praxi, tak pracovní listy s otázkami a konstrukčními příklady. Pro řešení těchto konstrukčních příkladů jsme vybrali program Geogebra, v němž je možné vytvářet dynamické konstrukce.

Dále jsme se snažili deskriptivní geometrii provázat také s matematikou částí při odvozování vektorových vyjádření jednotlivých ploch.

Písenná část diplomové práce je doplněna o elektronickou formu studijního materiálu v podobě webových stránek, které jsou součástí přiloženého CD. Cílem tvorby těchto webových stránek bylo lepší zpřístupnění učebního materiálu. Protože v dnešní době studenti spíše sedí u počítačů nežli u knížek, jsou tyto webové stránky vhodnou alternativou učebnice.

Stránky mají stejnou podobu učebního materiálu jako text diplomové práce. Důležité je, že jsou stránky členěné podle jednotlivých kapitol a jsou provázané pomocí odkazů. Stránky navíc obsahují některé zajímavé historické poznámky a pro každou plochu je přidána fotogalerie s dalšími příklady využití. Na hlavní stránce si uživatel může zvolit, zda ho zajímá teoretická část o jednotlivých plochách nebo zda ho zajímají konstrukční úlohy či postupy vytvořených modelů.

Sadu konstrukčních úloh jsme pro přehlednost rozdělili podle jednotlivých ploch. U každého příkladu je v úvodu zadání příkladu, následuje postup konstrukce s případným doprovodným slovem a po kliknutí na odkaz *Řešení v Geogebře* se ve vyhrazeném rámečku objeví konstrukce, kterou lze krokovat a případně modifikovat posouváním některých bodů. Takto krokovaná konstrukce se nám osvědčila při zkušební hodině, při které byla část práce předvedena na střední škole.

Původním záměrem bylo vytvořit učební materiál pro studenty středních škol, kteří by tento materiál využívali během speciálního semináře deskrip-

tivní geometrie. Po vyzkoušení části vypracované diplomové práce na střední škole jsme zjistili, že vytvořený studijní materiál je pro studenty středních škol příliš složitý.

Na střední školy by bylo možné zařadit rotační plochy s vynecháním vektorových vyjádření. Šroubové plochy a konoidy jsou již velice náročnou látkou a pro studenty jsou obtížné na představivost. Bylo by možné jej využívat pro nadané studenty, jako rozšiřující učivo. Lepší využití by měl, pokud bychom jej zařadili jako studijní materiál pro studenty vysokých škol, konkrétně pro 1. nebo 2. ročník bakalářského studia.

Snad se nám podařilo zachytit podstatné informace o plochách technické praxe, které lze prostřednictvím této diplomové práce předat studentům zajímajících se o deskriptivní geometrii. Věříme, že vzbudíme zájem o tento materiál prostřednictvím vytvořených webových stránek.

Pokud by práce byla využívána při výuce na vysokých školách, bylo by možné další její rozšíření i o jiné plochy a o sadu dalších i složitějších konstrukčních příkladů. Webové stránky by bylo možné také zdokonalit a zajistit přímý přístup s internetových prohlížečů popřípadě ze samotného webu odpovídajícího předmětu.

Literatura

- [1] Urban A. **Deskriptivní geometrie II**. SNTL, Praha 1967.
- [2] Piska R., Medek V. **Deskriptivní geometrie II**. SNTL, Praha, Bratislava 1966.
- [3] Tomiczková S. **Deskriptivní geometrie I** - Pomocný učební text verze 5.1. ZČU, Plzeň 2011.
- [4] Ježek F. **Geometrické a počítačové modelování** - Pomocný učební text verze 8.1. ZČU, Plzeň 2006.
- [5] Ježek F., Tomiczková S. **Geometrie pro FST2** - Pomocný učební text verze 5.0. ZČU, Plzeň 2010.
- [6] Kovář P. **Úpravy toků** - skriptum. VŠZ Praha, Praha 1988.
- [7] Hložek M. **Sférická geometrie** - diplomová práce. ZČU, Plzeň 2005.
- [8] Dillinger J. a kol. **Moderní strojírenství pro školu a praxi**. Europa-Sobotáles cz.-s.r.o., Praha 2007.
- [9] Berka R. **Kategorizace svislých dopravníků** - bakalářská práce. VUT, Brno 2010.
- [10] Rauner K. **Jak funguje počítačová myš**. Školská fyzika [online]. 16.3.2012, č. 1, s. 17-20 (říjen 2012).
http://sf.zcu.cz/data/2012/sf2012_01_5.pdf
- [11] **skripta TUL-FS-KVS**.(září 2012).
<http://www.kvs.tul.cz/download/rapid-prototyping/rp1-skripta.pdf>

- [12] **Autocentrum RK home page.**(březen 2012).
<http://www.autocentrumrk.cz/historie-pneumatik/>
- [13] **2EL s.r.o. home page.**(duben 2012).
<http://2el.magnetotherapy.com/?10,biotorus-lt-100>
- [14] **Kasík P. Nemáte radar? Tak musíte poslouchat....** Technet.cz [online]. 9.6.2007 (listopad 2012).
http://technet.idnes.cz/nemate-radar-tak-musite-poslouchat-dty-/tec_technika.aspx?c=A070525_170259_tec_technika_pka
- [15] **Vokáč L. Ford používá techniku z první světové války k vylepšení současných aut.** Auto.idnes.cz [online]. 7.2.2012 (listopad 2012).
http://auto.idnes.cz/ford-pouziva-techniku-z-prvni-svetove-valky-k-vylepseni-soucasnych-aut-1a9-/automoto.aspx?c=A120205_225349_automoto_vok
- [16] **Informační a vzdělávací portál školství Zlínského kraje home page.** (květen 2012).
<http://www.zkola.cz/zkedu/pedagogictipracovnici/kabinet-prirodnichved/metodickematerialyvyukoveprogramy/vyukove-materialyzyfyziky/17584.aspx>
- [17] **wikipedia.infostar.cz home page.**(leden 2013).
<http://wikipedia.infostar.cz/c/co/corkscrew.html>
- [18] **Římsko-katolická farnost Neposkvrněného početí panny Marie home page.** (září 2012).
<http://www.farnoststrasnice.cz/farnost.php?doc=kostel.htm>
- [19] **osobní stránky Mgr. Jiřího Doležala VŠB-TU.**(květen 2012).
<http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Plochy/ZborcenePlochy/Konoidy/Realizace/PrimyVlnkovyKonoid.html>
- [20] **archiweb home page.**(leden 2012).
<http://www.archiweb.cz/>

Seznam převzatých obrázků

- **Obrázek 2.4:** Sférický trojúhelník (leden 2012) převzato a upraveno z: http://forum.matweb.cz/upload3/img/2011-12/82609_sfr1.png
- **Obrázek 2.5:** Státní opera v Sydney (leden 2012) převzato z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Sydney_Opera_House_Sails.jpg
- **Obrázek 2.6:** Maketa skořepin (leden 2012) převzato a upraveno z: Fotografie od pracovníka z KMA ZČU v Plzni
- **Obrázek 2.7:** Schéma kuličkové myši (únor 2012) převzato z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Mouse-mechanism-cutaway.png>
- **Obrázek 2.8:** Kulová dotyková měřící sonda (květen 2012) převzato a upraveno z (str. 12): http://www.kvs.tul.cz/download/rapid_prototyping/rp1-skripta.pdf
- **Obrázek 2.11:** Různé Cassiniho ovály (září 2012) převzato z: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Line_of_Cassini.svg
- **Obrázek 2.13:** Profil trasy proudnice (červen 2012) převzato z: výuková prezentace k předmětu *Malé vodní toky* (ČZU Praha) poskytnuta vyučujícím Prof. Dr. Pavlem Kovářem
- **Obrázek 2.16:** Duše pneumatiky (únor 2012) převzato z: <http://www.pneumarek.com/10731-duse/23550-duse-10-75-15-3-tr15/>

- **Obrázek 2.17:** Kuličkové ložisko (únor 2012) převzato z:
<http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Thrust-ball-bearing-din711-ex.png>
- **Obrázek 2.18:** Biotorus (duben 2012) převzato z:
<http://2el.magnetotherapy.com/?10,biotorus-1t-100>
- **Obrázek 2.19:** Toroidní vinutí (duben 2012) převzato z:
<http://www.techmania.cz/edutorium/data/fil.4477.jpg>
- **Obrázek 2.25:** Chladicí věže jaderné elektrárny Temelín (duben 2012) převzato z:
<http://i3.cn.cz/14/1320764532-008.jpg>
- **Obrázek 2.26:** Lávka pro pěší Manchester (prosinec 2011) převzato z:
http://farm9.staticflickr.com/8056/8077925310_2109ebd50e_z.jpg
- **Obrázek 2.27:** Rozhledna Borůvka u obce Hlubová nedaleko Pardubic (březen 2012) převzato z:
<http://turistickyatlas.cz/vse/misto/6472-rozhledna-boruvka.html>
- **Obrázek 2.28:** Televizní věž v přístavu města Kobe, Japonsko (květen 2012) převzato z:
<http://japonsko.tripzone.cz/fotogalerie/kobe-nocni-pristav-6614>
- **Obrázek 2.29:** Soukolí hypoidního převodu a jeho detail (květen 2012) převzato z:
vlevo: [2] viz seznam použité literatury (str. 87)
uprostřed: <http://kag.upol.cz/juklova/4rocnik/img4/Z1-7.jpg>
vpravo: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Sprocket03.jpg>
- **Obrázek 2.33:** Akustické zrcadlo nedaleko Kilnsea, VB (listopad 2012) převzato z:
[http://auto.idnes.cz/ford-pouziva-techniku-z-prvni-svetove-
valky-k-vylepseni-soucasnych-aut-1a9-/automoto.aspx?c=
A120205_225349_automoto_vok](http://auto.idnes.cz/ford-pouziva-techniku-z-prvni-svetove-valky-k-vylepseni-soucasnych-aut-1a9-/automoto.aspx?c=A120205_225349_automoto_vok)

- **Obrázek 2.34:** Běluha severní (listopad 2012) převzato z:
http://www.iloveocean.estranky.cz/img/picture/4/beluga_whale_8907.jpg
- **Obrázek 2.35:** Řez Newtonovým astronomickým dalekohledem (prosinec 2012) převzato z:
http://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/fyzika/prof/Tesar/diplomky/obr_dopl_optika/optika/dalekohledy/dalsi_typy/hvezd/new_sc.jpg
- **Obrázek 2.36:** Parabolické bezpečnostní zrcadlo (listopad 2012) převzato z:
<http://www.patera-zrcadla.cz/>
- **Obrázek 3.4:** Archimédův šroub (leden 2013) převzato z:
<http://hydroscrew.blogspot.cz/2011/09/archimedes-screw-pump-archimedes.html>
- **Obrázek 3.7:** Různé typy osových řezů šroubů (listopad 2012) převzato a upraveno z:
<http://kag.upol.cz/juklova/4rocnik/SRP5.html>
- **Obrázek 3.8:** Hmoždinka s ostrým závitem (listopad 2012) převzato z:
<http://www.pk-fischer.cz/content/images/eshop/52389.jpg>
- **Obrázek 3.9:** Válcová fréza (listopad 2012) převzato z:
http://www.kovonastroje.cz/out/pictures/z2/img5938_2_dfe18db5e815e6ffea0bd57a8774843e14d62e09.jpg
- **Obrázek 3.10:** Kovová špona po obrábění (listopad 2012) převzato z:
http://nd01.jxs.cz/431/534/3a6f6b53ec_33197378_o2.jpg
- **Obrázek 3.11:** Vývrtka na víno (září 2012) převzato z:
<http://www.hunting-shop.cz/Obrázky/Zbozi/vyvrtka--big.jpg>
- **Obrázek 3.12:** Točité schodiště v Louvre (září 2012) převzato z:
<http://www.pbase.com/chammett/image/143241253>
- **Obrázek 3.17:** Řez maticí kuličkového šroubu (červenec 2012) převzato a upraveno z:
vlevo: <http://www.mmspektrum.com/clanek/volba-kulickovych->

sroubu.html

vpravo: http://www.kks.zcu.cz/pro-studenty-KKS/Studijni_podklady/PRIRUCKA/CADIS/default.htm

- **Obrázek 3.18:** Pružina tlumiče (listopad 2012) převzato z:
<http://www.koladraci.cz/user/shop/category/1083.jpg>
- **Obrázek 4.4:** Kostel Neposkvrněného početí Panny Marie (září 2012) převzato z:
<http://www.farnoststrasnice.cz/farnost.php?doc=kostel.htm>
- **Obrázek 2.8:** Půdorys budovy a vnitřní prostory chrámu (září 2012) převzato z:
<http://www.farnoststrasnice.cz/farnost.php?doc=kostel.htm>
- **Obrázek 4.9:** Laminární proudění (říjen 2012) převzato a upraveno z:
http://www.techmania.cz/edutorium/data/fil_0976.gif
- **Obrázek 4.10:** Přehrada Mooserboden, Rakousko (listopad 2012) převzato z:
<http://i656.photobucket.com/albums/uu286/DrMcNamara1/Namara/mooserboden2-1.jpg>
- **Obrázek 4.13:** Zed' národů, Athény-Řecko (květen 2012) převzato z:
<http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Plochy/ZborcenePlochy/Konoidy/Realizace/PrimyVlnkovyKonoid.html>
- **Obrázek 4.15:** Vinařství Bodegas Ysios (květen 2012) převzato z:
<http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Plochy/ZborcenePlochy/Konoidy/Realizace/PrimyVlnkovyKonoid.html>

Přílohy

PŘÍLOHA A

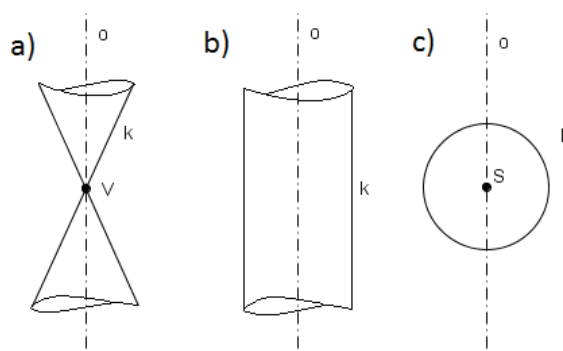
Pracovní list – rotační plochy

Na obrázku vpravo jsou tři rotační plochy, které nazýváme:

a)

b)

c)



Jakými prvky jsou určeny rotační plochy?

.....

Co platí pro rotační plochy vzhledem k ose rotačního pohybu?

.....

Jak nazýváme řez rovinou, která prochází osou rotačního pohybu?

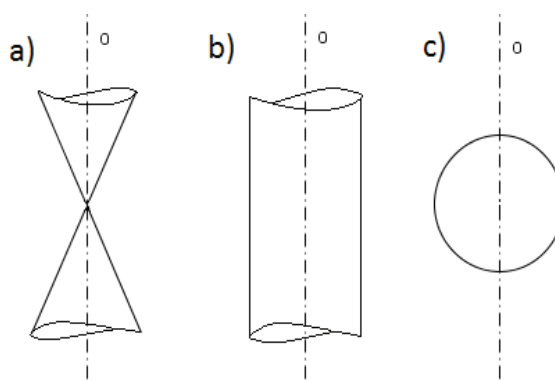
.....

Jaké rovinné křivky získáme, provedeme-li osový řez rotačních ploch na obrázku vpravo? (Tyto řezy na obrázcích vyznačte odlišnou barvou.)

a)

b)

c)



Co je rovnoběžková kružnice? (Vysvětlete pojem.)

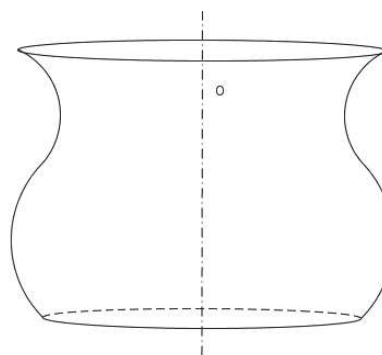
.....

Pro rotační plochy rozlišujeme tři významné rovnoběžkové kružnice, jak je nazýváme? (Vyznačte na obrázku vpravo.)

a)

b)

c)



Kulová plocha



Co je nárysem a půdorysem kulové plochy?

.....

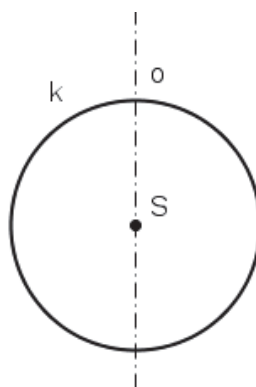
Jaká rovinná křivka je hlavním meridiánem kulové plochy, je-li rovina osového řezu rovnoběžná s nárysnou a jak se tato křivka zobrazí v náryse a půdoryse?

.....

Které z rovnoběžkových kružnic (hrdlo, rovník, kráter) má kulová plocha?

(Zakreslete do obrázku níže.)

.....



Jaké praktické využití má kulová plocha? (Uvedte alespoň 5 příkladů.)

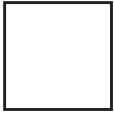
.....

.....

S využitím počítače a internetu vyhledejte, proč je na kupole hvězdáren či kupole kostelů využívána právě část kulové plochy (polokoule)?

.....

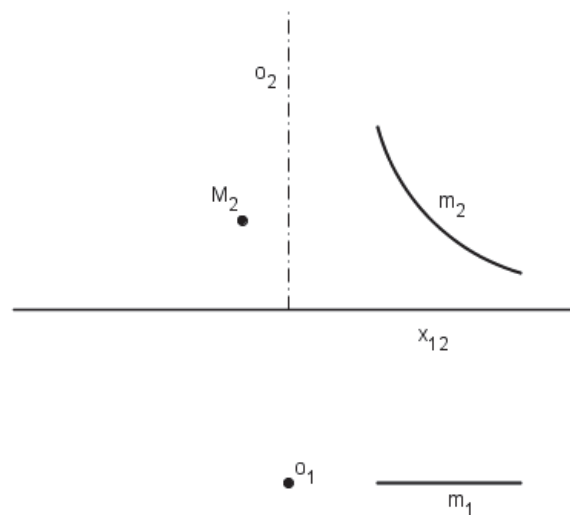
.....



- 1) Jaké budou délky oblouků sférického trojúhelníku, jestliže víme, že roviny ρ , σ a φ jsou po dvou na sebe kolmé, poloměr kulové plochy je 30 metrů (kružnice v rovinách ρ , σ) a poloměr kružnice, která je řezem kulové plochy rovinou φ je 10 metrů? Načrtněte pomocné obrázky k výpočtům.

- 2) Sestrojte půdorys bodu M ležícího na rotační ploše, je-li tato rotační plocha dána osou rotačního pohybu o a hlavním meridiánem plochy m .

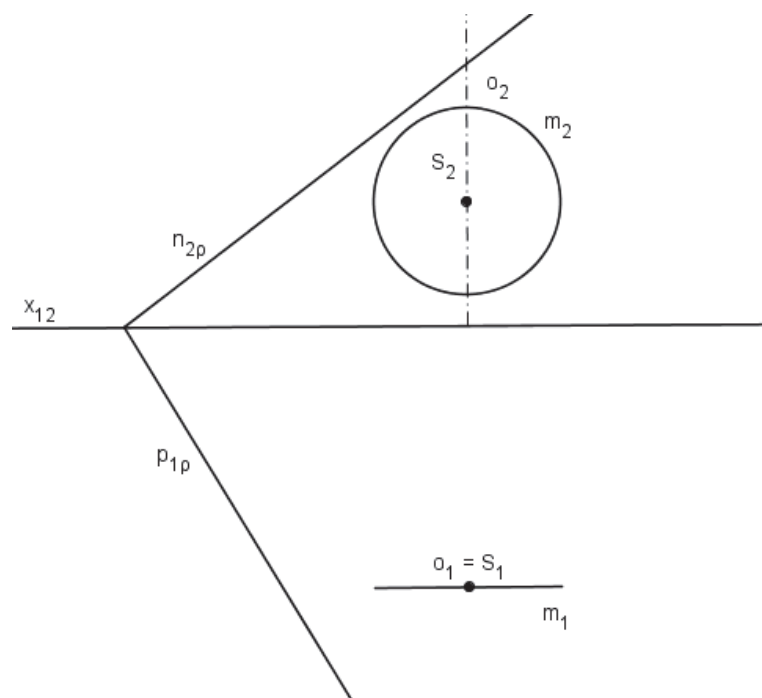
(webové stránky: Kulová plocha – Příklad 1)



- Bodem M vedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (nárýs – bod M'_2 navíc vzdálenost bodu M'_2 od osy o_2 je rovna poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou: rovnoběžková kružnice (půdorys – kružnice r_{M1}).
- Odvodíme půdorys M_1 bodu M (získáme dva body M_{1a}, M_{1b} – leží na rovnoběžkové kružnici r_{M1}).

3) Sestrojte jeden bod řezu kulové plochy, je-li dána osa o , meridián m a rovina řezu ρ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Kulová plocha – Příklad 2)

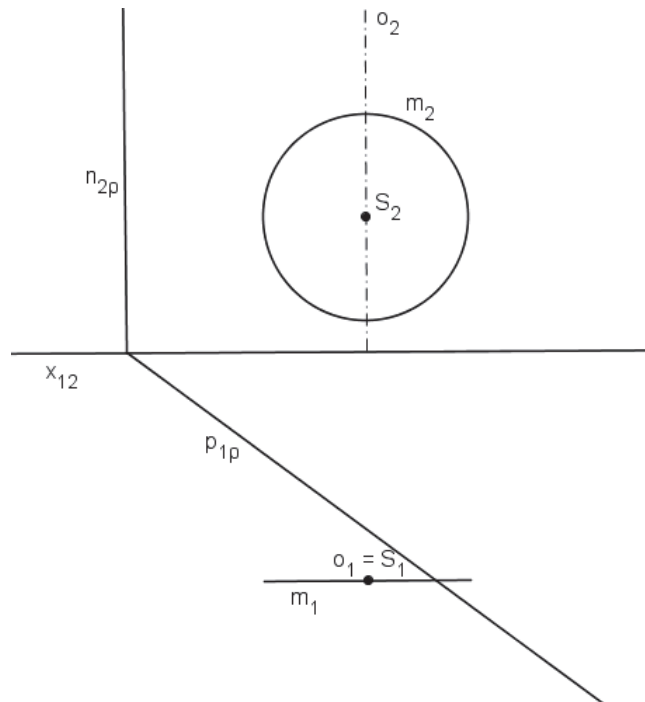


- Zvolíme bod A v rovině ρ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\rho}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin ρ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\rho}$, platí $h_{2\rho} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\rho}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárýsu).

Postup se opakuje, dokud nezískáme dostatečný počet bodů řezu. Těmito body aproximujeme spojitou křivku. Další body řezu lze ukázat ve vyřešeném příkladu v programu Geogebra. Pohybováním bodem A obdržíme jednotlivé body řezu. Řezem kulové plochy je kružnice, která se promítá do elipsy.

4) Analogicky jako u předchozího příkladu sestrojte jeden bod řezu kulové plochy, je-li dána osa o , meridián m a rovina řezu ρ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Kulová plocha – Příklad 3)



- Zvolíme opět bod A v rovině ρ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\rho}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin ρ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\rho}$, platí $h_{2\rho} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice $r_{M'}$).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\rho}$ s rovnoběžkovou kružnicí $r_{M'}$ (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárýsu).

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra při pohybování bodem A . Řezem kulové plochy bude opět kružnice, která se promítá v nárýsu do elipsy a v půdorysu do úsečky neboť rovina ρ je kolmá na půdorysu.

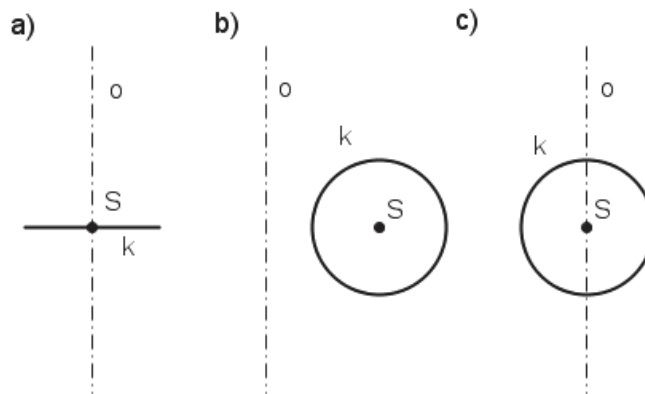
5) Jak zapíšete vektorové vyjádření kulové plochy, jestliže souřadnice středu kulové plochy jsou $S = [0, 0, 2]$, poloměr kulové plochy $r = 3$? (Jako osu rotace volte souřadnicovou osu z .) Načrtněte obrázek.



1) Jakou rovinnou křivku získáte řezem kulové plochy? (správnou odpověď zakroužkujte)

- a) Elipsa
- b) Kružnice
- c) Kruhový oblouk
- d) Jiná

2) Na kterém z následujících obrázků vznikne kulová plocha, je-li dána tvořící kružnice k a osa rotace o ? (správnou odpověď zakroužkujte)



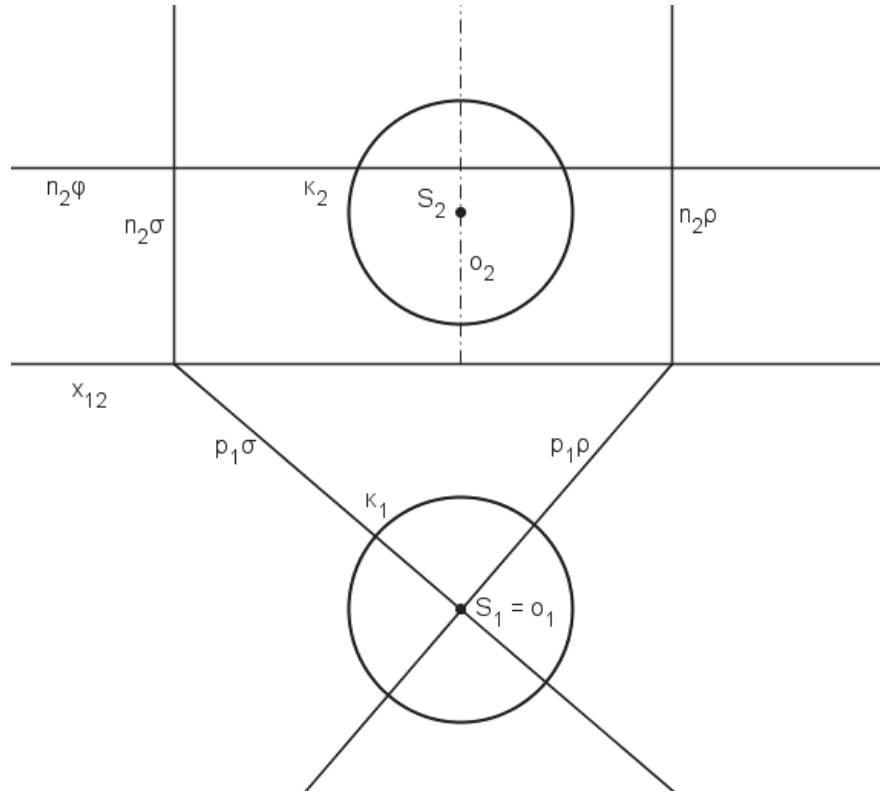
3) Sestrojte 4 body řezu kulové plochy rovinami ρ , σ takových, že obě procházejí středem kulové plochy a obě jsou kolmé na půdorysnou. Zároveň jsou kolmé na sebe navzájem. Dále sestrojte 2 body řezu kulové plochy rovinou φ , která je rovnoběžná s půdorysnou, viz obrázek níže. Úkolem je sestrojit sférický trojúhelník, proto jsou důležité jen ty části řezu, které se nachází nad rovinou φ .

(webové stránky: Kulová plocha – Příklad 4)

Nejprve provedte řez rovinou φ :

Rovina φ je rovnoběžná s půdorysnou (v půdoryse se řez touto rovinou promítne do rovnoběžkové kružnice a v náryse do úsečky).

- Průsečíky roviny φ s kulovou plochou (dva body B_2 a B'_2 určují rovnoběžkovou kružnici – v náryse úsečka $B_2B'_2$).
- Odvodíte půdorys r_{B1} rovnoběžkové kružnice (kružnice o poloměru $r = \frac{B_2B'_2}{2}$ a středem o_1).



Provedte řez rovinou σ a ρ :

Postup pro obě roviny je zcela analogický, proto jednotlivé kroky můžete konstruovat souběžně pro obě roviny.

- Zvolíme bod A v rovině σ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\sigma}$; volíme nad rovinou φ).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys – přímka α_2).
- Průnik rovin σ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys – přímka $h_{1\sigma}$ dále $h_{1\sigma} = \alpha_2$).
- Průnik rovin ρ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys – přímka $h_{1\rho}$, dále $h_{1\sigma} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s kulovou plochou – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontálních hlavních přímek $h_{1\sigma}$ a $h_{1\rho}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárysu).

Postup opakujte, dokud nezískáte požadovaný počet bodů řezu a těmito body aproximujte spojitou křivku. Celý sférický trojúhelník je v řešení v programu Geogebra. Při pohybu bodem A je vidět, že body řezu opisují strany sférického trojúhelníku. Průnikem těchto tří rovin s kulovou plochou bude jeden ze sférických trojúhelníků, který byl využit architektem J. Utzonem k zastřešení budovy Státní opery v Sydney.



Anuloid



Jaké typy anuloidu rozlišujeme?

.....

Co je hlavním kritériem pro rozlišení jednotlivých typů anuloidu v předchozí otázce?

.....

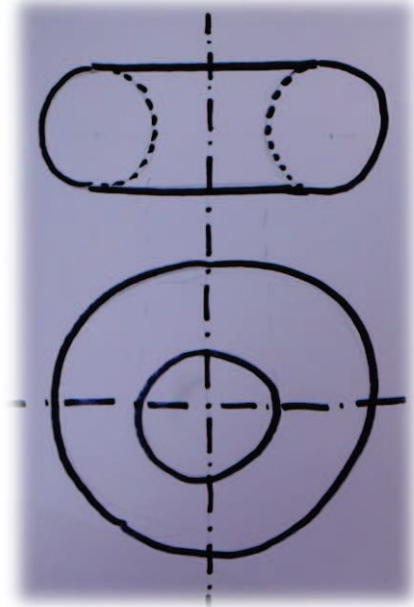
Jaké rovnoběžkové kružnice můžeme nalézt na anuloidu (rovník, kráter, hrdlo)? (Zakreslete do obrázku vpravo odlišnými barvami a popište.)

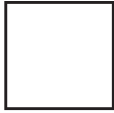
.....

.....

Jak nazýváme křivky, které vznikají řezem anuloidu (jednou z křivek je i Bernoulliova lemniskáta)?

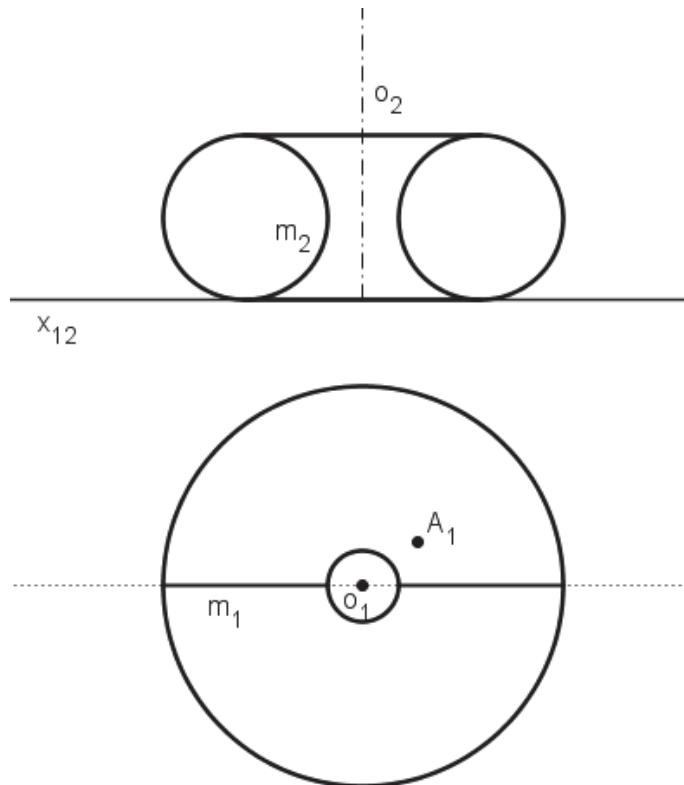
.....





1) Odvodte nárys bodu A ležícího na anuloidu. Anuloid je dán osou rotačního pohybu o a svým nárysem a půdorysem.

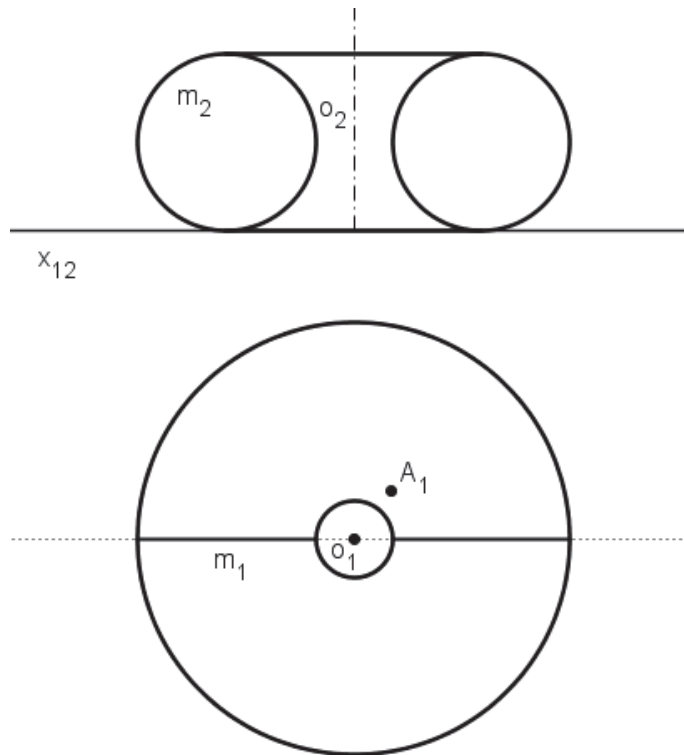
(webové stránky: Anuloid – Příklad 1)



- Bod A se pohybuje po rovnoběžkové kružnici r_A (půdorys – kružnice r_{A_1} se středem o_1 a poloměrem o_1A_1).
- Průnik rovnoběžkové kružnice s rovinou hlavního meridiánu je bod A' (půdorys – bod A'_1 , který následně odvodíme do nárysu).
- Bodem A' sestrojíme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys - přímka α_2).
- Odvodíme půdorys A_1 bodu A do nárysu (leží v rovině $\alpha \Rightarrow A_2 \in \alpha_2$).

2) Narýsujte tečnou rovinu τ anuloidu procházející bodem A , který je umístěn dle následujícího obrázku.

(webové stránky: Anuloid – Příklad 2)



- Bod A se pohybuje po rovnoběžkové kružnici r_A (půdorys – kružnice r_{A1} se středem o_1 a poloměrem o_1A_1).
- Průnik rovnoběžkové kružnice s rovinou hlavního meridiánu je bod A' (půdorys – bod A'_1 , který následně odvodíme do nárýsu).
- Bodem A' sestrojíme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs - přímka α_2), která se zároveň shoduje s nárýsem t_{2rA} tečny rovnoběžkové kružnice – jedna z tečen určující tečnou rovinu).
- Odvodíme půdorys A_1 bodu A do nárýsu (leží v rovině α - $A_2 \in \alpha_2$).
- Sestrojíme půdorys t_{1rA} tečny t_{rA} (tečna k rovnoběžkové kružnici r_A) bodem A , nárýs t_{2rA} tečny rovnoběžkové kružnice se shoduje s přímkou α_2 .
- Sestrojíme půdorys t_{1m} tečny t_m (tečna k meridiánu) bodem A (přímka procházející body o_1 a A_1).
- V nárýse sestrojíme pomocnou tečnu k hlavnímu meridiánu bodem A'_2 (průsečík této pomocné tečny s osou rotačního pohybu je bod M).
- Sestrojíme nárýs t_{2m} tečny t_m (přímka procházející body A_2 a M_2).
- Tečnou rovinu určuje tečna k meridiánu a zároveň tečna k rovnoběžkové kružnici.

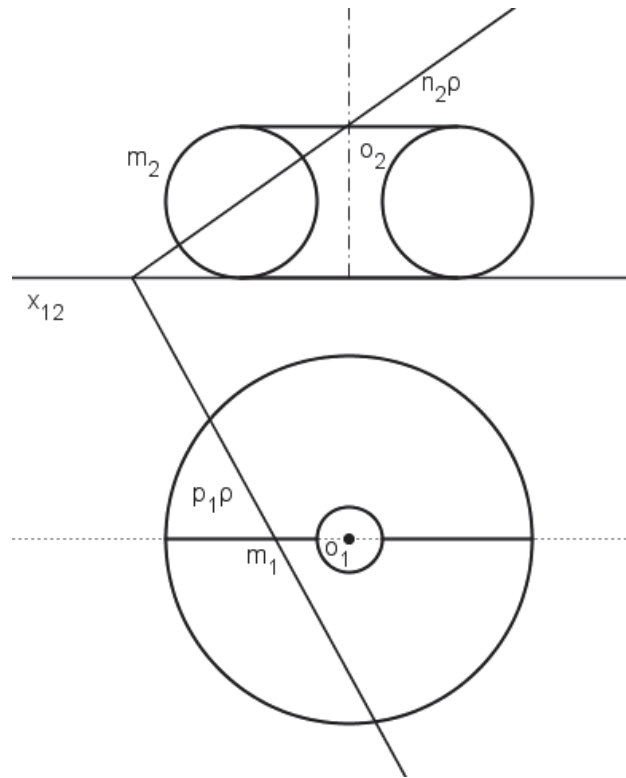
3) Sestavte vektorové vyjádření anuloidu jestliže za osu rotace zvolíte souřadnicovou osu z . Poloměr tvořící kružnice je $r = 3$ a střed tvořící kružnice $S = [0, n, 0]$ $n \in \mathbb{N}$. Tvořící křivka leží v rovině yz . Číslo n nahradíte vhodným číslem tak, aby vznikly všechny tři typy anuloidu, načrtněte obrázky.

4) Sestrojte alespoň 4 body řezu anuloidu rovinou ρ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Anuloid – Příklad 3)

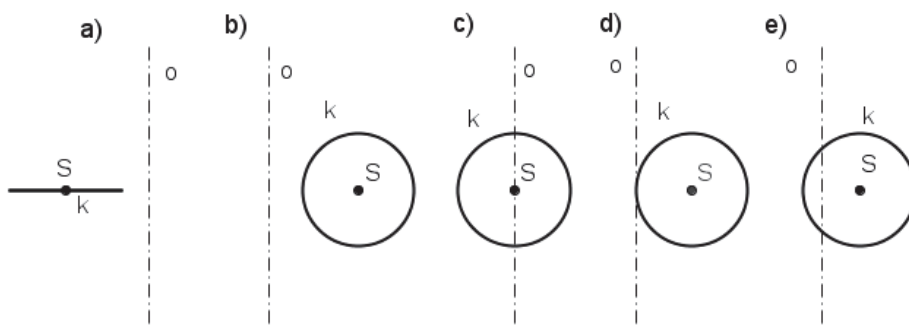
- Zvolíme opět bod A v rovině ρ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\rho}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin ρ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\rho}$, platí $h_{2\rho} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocné body M a M' (slouží k určení poloměru rovnoběžkových kružnic).
- Průnik roviny α s rotační plochou jsou dvě rovnoběžkové kružnice (v půdoryse se promítnou do kružnic r_{M1} a $r_{M'1}$).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\rho}$ s rovnoběžkovými kružnicemi r_{M1} a $r_{M'1}$ (získáme půdorysy X_1, Y_1, T_1, U_1 bodů řezu X, Y, T a U , které odvodíme do nárýsu).

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra pohybáním bodem A .



- 1) Pomocí počítače a internetu nalezněte alespoň 3 příklady praktického využití anuloidu v různých oblastech?

- 2) Na kterém z následujících obrázků vznikne anuloid, melanoid a axoid. Jsou-li tvořící kružnice k a osa rotace o zadané následujícími způsoby? (Správnou odpověď zakroužkujte a popište, který typ anuloidu na daném obrázku vznikne.)

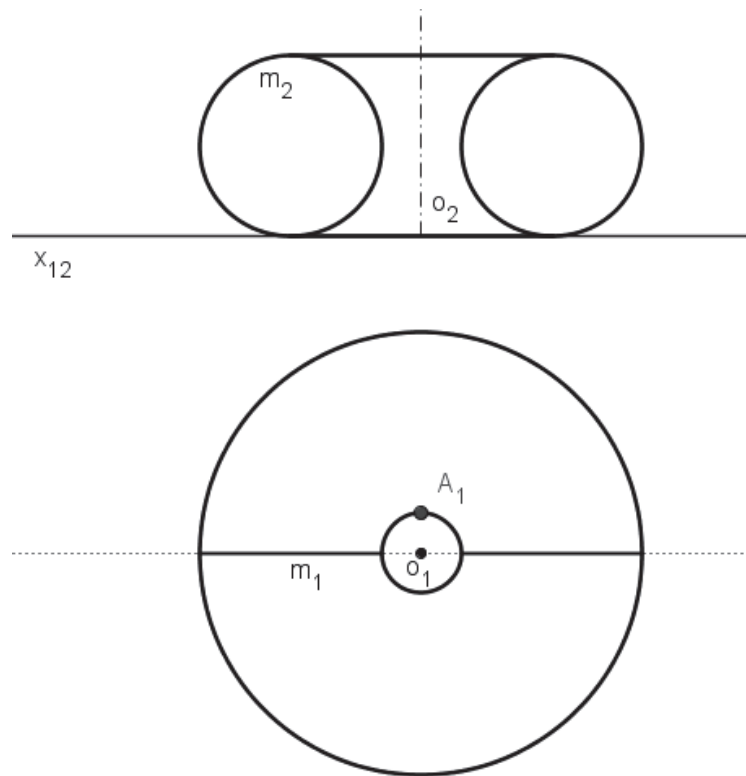


- 3) Sestrojte alespoň 4 body řezu anuloidu tečnou rovinou τ . Ta bude procházet bodem **A**, jehož půdorys leží na hrdlové rovnoběžkové kružnici. Tvořící kružnice rotuje kolem osy o , viz následující obrázek.

(webové stránky: Anuloid – Příklad 4)

Postupujte zcela analogicky jako u předchozích příkladů vyložených během výuky. Konkrétně je tento příklad spojením 2. a 4. příkladu. Stačí 4 body řezu, protože celkové řešení lze ukázat opět v programu Geogebra, pokud budeme pohybovat bodem **B**.

V tomto konkrétním příkladu bude řezem anuloidu speciální rovinná křivka tzv. **Bernoulliova lemniskáta**, o které jsme se zmínili během výkladu této plochy.



- Sestrojte tečnou rovinu τ , která je určena tečnou k rovnoběžkové kružnici a tečnou k meridiánu (viz postup příkladu 2) – půdorys t_{1m} tečný k meridiánu bodem **A** splývá s půdorysem A_1 bodu **A**.
- Zvolte bod **B** (na hlavním meridiánu plochy).
- Bodem **B** vedte pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys – přímka α_2).
- Průnik rovin τ a α (půdorys – horizontální hlavní přímka $h_1\tau$; přímka se shoduje s půdorysem tečny k rovnoběžkové kružnici bodu **A**).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocné body, které slouží k určení poloměru rovnoběžkových kružnic).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_1\tau$ s rovnoběžkovými kružnicemi pomocných bodů (získáme půdorysy X_1, Y_1, T_1, U_1 bodů řezu **X, Y, T a U**, které odvodíme do nárysu).

Jednodílný rotační hyperboloid



Pohybem jakých rovinných křivek lze vytvořit plochu jednodílného rotačního hyperboloidu?

.....

Má jednodílný rotační hyperboloid některou z těchto rovnoběžkových kružnic – hrdlo, kráter, rovník? (Zakreslete do obrázku vpravo odlišnými barvami a popište.)

.....

Co je osou rotačního pohybu, pokud plocha vzniká rotací hyperboly?

.....

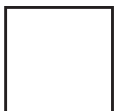
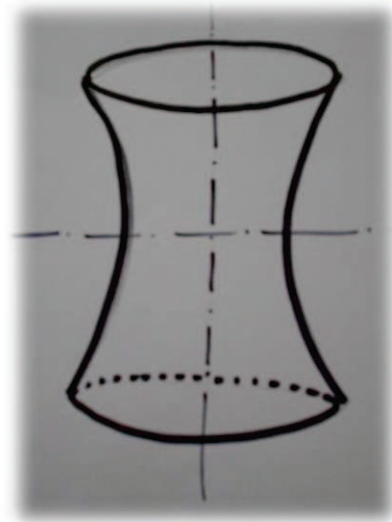
Pokud plocha vzniká rotací přímky, jakou polohu má tato přímka vůči ose?

.....

S využitím počítače a internetu zjistěte, proč je pro chladicí věže využívána právě plocha jednodílného hyperboloidu.

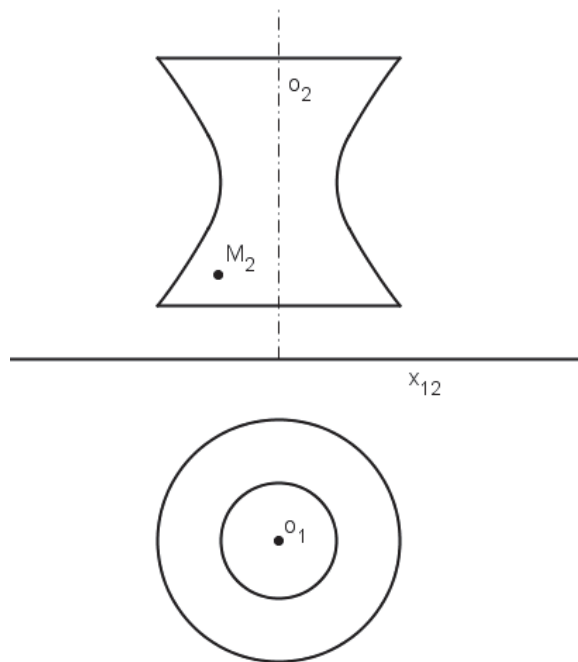
.....

.....



- 1) Odvodte půdorys bodu M , který leží na rotačním jednodílném hyperboloidu. Plocha je dána osou rotačního pohybu o a svým nárysem a půdorysem.

(webové stránky: Jednodílný rotační hyperboloid – Příklad 1)



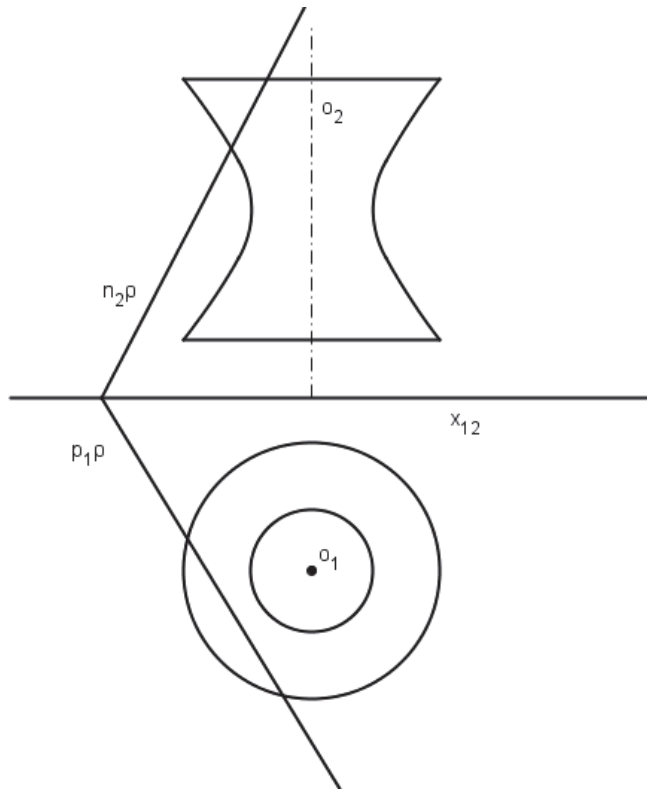
- Bodem M vedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys – přímka α_2).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (nárys – bod M'_2 navíc vzdálenost bodu M'_2 od osy o_2 je rovna poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou: rovnoběžková kružnice (púdorys – kružnice r_{M1}).
- Odvodíme púdorys M_1 bodu M (získáme dva body M_{1a}, M_{1b} – leží na rovnoběžkové kružnici r_{M1}).

2) Sestrojte 2 body řezu jednodílného rotačního hyperboloidu rovinou ρ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Jednodílný rotační hyperboloid – Příklad 2)

- Zvolíme bod A v rovině ρ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\rho}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys – přímka α_2).
- Průnik rovin ρ a α (horizontální hlavní přímka; púdorys – přímka $h_{1\rho}$, platí $h_{2\rho} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v púdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\rho}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme púdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárysu).

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra pokud budeme pohybovat bodem A .



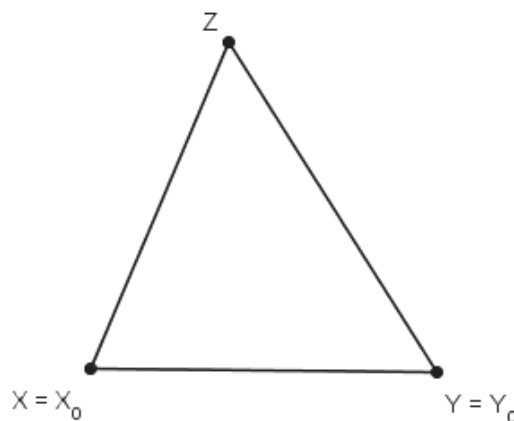
- 3) Napište parametrické vyjádření jednodílného rotačního hyperboloidu, je-li tvořící křivkou hyperbola $H(t) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t, 0 \right)$ a dále platí, že a je hlavní poloosa a b je vedlejší poloosa hyperboly.



- 1) Uved'te alespoň 3 příklady praktického využití jednodílného rotačního hyperboloidu, které naleznete s využitím různých zdrojů (internet, knihy, vlastní zkušenosti).

- 2) Které z následujících tvrzení o jednodílném rotačním hyperboloidu je správné.
- Jednodílný rotační hyperboloid vznikne rotací kolem osy paraboly.
 - Jednodílný rotační hyperboloid není souměrný podle osy rotačního pohybu.
 - Jednodílný rotační hyperboloid lze vytvořit pouze rotací hyperboly.
 - Jednodílný rotační hyperboloid vznikne rotací kolem vedlejší osy hyperboly.
- 3) V pravouhlé axonometrii, zadané obrázkem níže, sestrojte jednodílný rotační hyperboloid, jehož podstava leží v rovině xy a osou rotačního pohybu bude osa z . Tento jednodílný rotační hyperboloid, vzniká rotací úsečky AB . Souřadnice bodů jsou $A = [4, 0, 0]$, $B = [0, 4, 8]$. Sestrojte jednotlivé polohy úsečky otáčením po 90° .

(webové stránky: Jednodílný rotační hyperboloid – Příklad 3)



- Osy x , y a z se v pravouhlé axonometrii promítají do výšek axonometrického trojúhelníku XYZ .
- Rovinu xy otočíte kolem přímky XY a získáte otočené osy x_0 a y_0 (využijte Thaletovu kružnici).
- Pomocí otočených os, na kterých se vynášejí skutečné jednotky, sestrojíte půdorysy bodů A_1 a B_1 .
- Rovinu xz otočíte kolem přímky XZ a získáte otočené osy x_0 a z_0 (opět využijte Thaletovu kružnici).
- Pomocí otočené osy z_0 sestrojíte axonometrický průmět bodu B (bod $A = A_1$).
- Jednodílný rotační hyperboloid vzniká rotací úsečky AB .
- Přímka XY je osou afinity o_A .
- V otočení zvolte bod A_{V0} .
- V osové afinitě převedte bod A_{V0} na bod A_{V1} .

- Zcela analogicky sestrojte bod B_{V0} a B_{V1} (úhel $A_{V0}O_0 B_{V0}$ je roven 90°) – bod B_{V1} je nutné převést do druhé podstavy ve výšce 8 (vznikne tak bod B'_{V1}).
- Další poloha úsečky AB je úsečka $A_{V1}B'_{V1}$.

Pohybem bodu A_{V0} lze ve vyřešeném příkladu v Geogebře ukázat, jak budou vypadat další polohy úsečky AB .

Rotační paraboloid



Pohybem jaké rovinné křivky vznikne rotační paraboloid?

.....

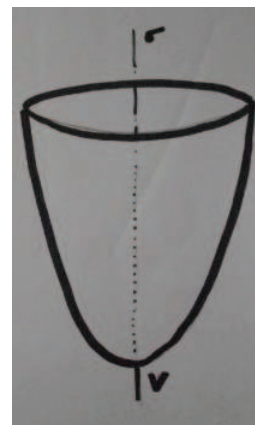
Jakou polohu má vrchol tvořící křivky vůči ose rotačního pohybu?

.....

Co se stane s plochou rotačního paraboloidu, pokud budeme měnit koeficienty a , b , c ve vyjádření tvořící křivky.

.....

Má plocha rotačního paraboloidu některou z následujících rovnoběžkových kružnic (rovník, kráter, hrdlo)? Pokud ano, vyznačte je na obrázku v pravo.



.....

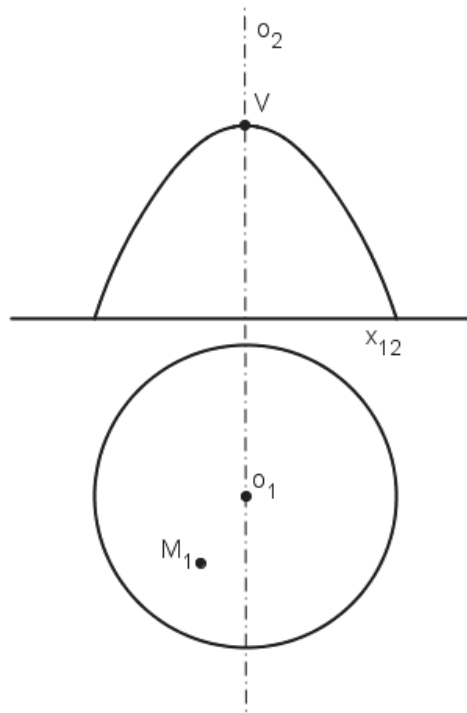
Zjistěte pomocí internetu, jak principiálně funguje tzv. „akustický telefon“ (dva rotační paraboloidy proti sobě)

.....



1) Sestrojte nárys bodu M , který leží na ploše rotačního paraboloidu. Rotační paraboloid je určen osou rotačního pohybu o a svým půdorysem a nárysem.

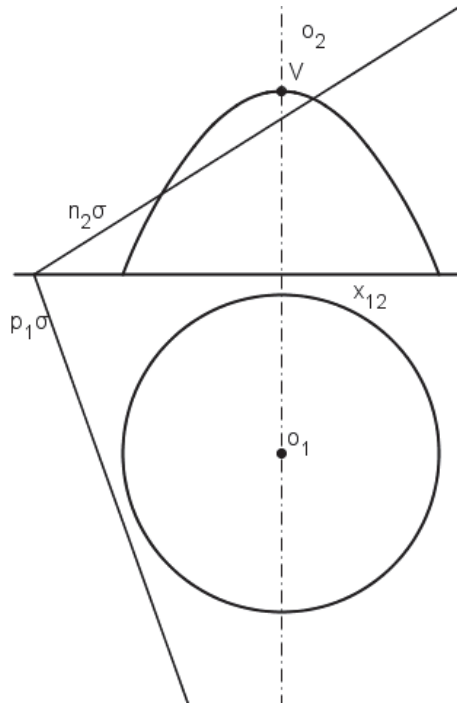
(webové stránky: Rotační paraboloid – Příklad 1)



- Bod M se pohybuje po rovnoběžkové kružnici r_M (půdorys – kružnice r_{M1} se středem o_1 a poloměrem o_1M_1).
- Průnik rovnoběžkové kružnice s rovinou hlavního meridiánu je bod M' (půdorys – bod M'_1 , který následně odvodíme do nárysu).
- Bodem M' sestrojíme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárys - přímka α_2).
- Odvodíme půdorys M_1 bodu M do nárysu (leží v rovině $\alpha \Rightarrow A_2 \in \alpha_2$).

2) Sestrojte alespoň 2 body řezu rotačního paraboloidu rovinou σ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Rotační paraboloid – Příklad 2)



- Zvolíme bod A v rovině σ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\sigma}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α : $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin σ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\sigma}$, platí $h_{2\sigma} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\sigma}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárýsu).

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra pokud budeme pohybovat bodem A .



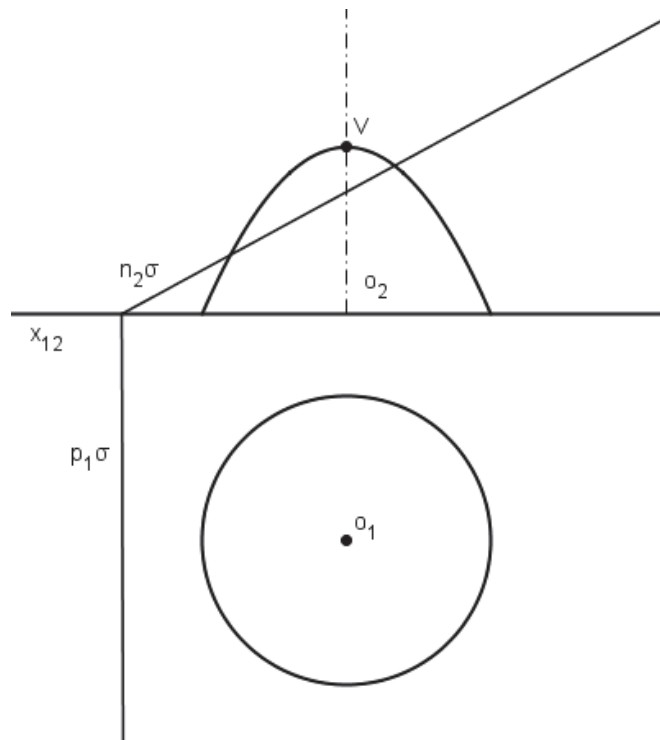
1) Sestrojte alespoň 4 body řezu rovinou σ , viz následující obrázek.

(webové stránky: Rotační paraboloid – Příklad 3)

- Zvolíme bod A v rovině σ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\sigma}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α : $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin σ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\sigma}$, platí $h_{2\sigma} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).

- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\sigma}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárýsu).
- Postup ještě jednou opakujte.

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra pokud budeme pohybovat bodem A .

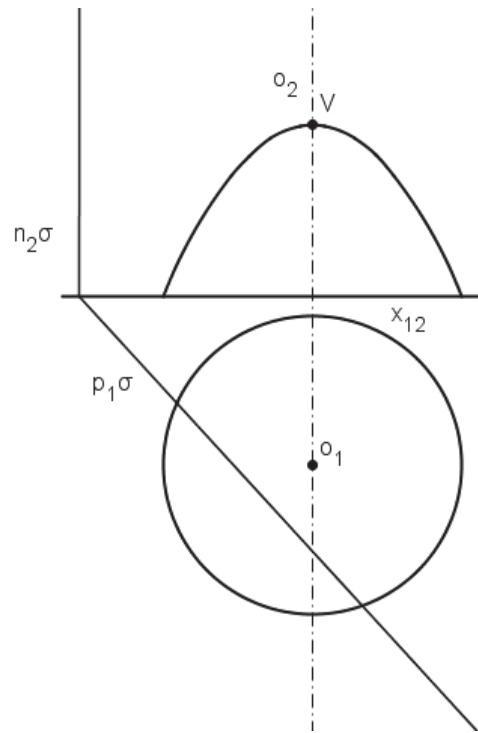


2) Sestrojte alespoň 4 body řezu rovinou σ , viz následující obrázek.

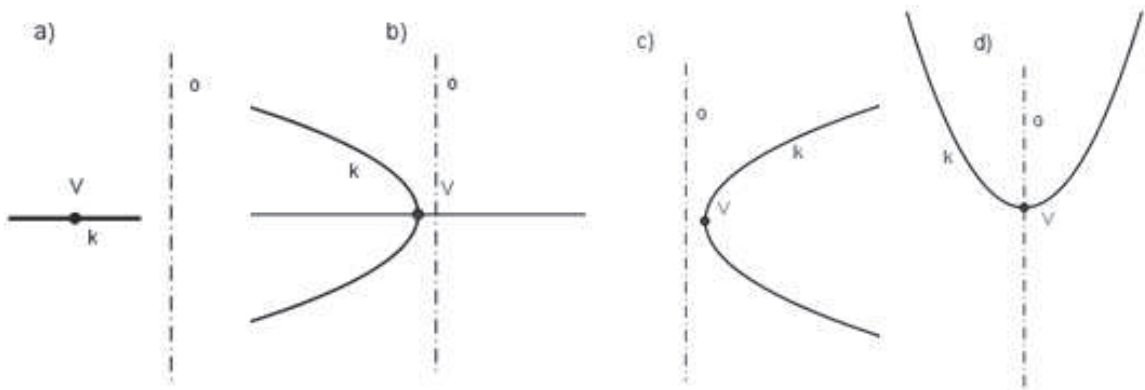
(webové stránky: Rotační paraboloid – Příklad 4)

- Zvolíme bod A v rovině σ (pro jednoduchost $A_2 \in n_{2\sigma}$).
- Bodem A povedeme pomocnou rovinu α ; $\alpha \perp o$ (nárýs – přímka α_2).
- Průnik rovin σ a α (horizontální hlavní přímka; půdorys - přímka $h_{1\sigma}$, platí $h_{2\sigma} = \alpha_2$).
- Průnik roviny α s meridiánem – pomocný bod M' (slouží opět k určení poloměru rovnoběžkové kružnice).
- Průnik roviny α s rotační plochou je opět rovnoběžková kružnice (v půdoryse se promítne do kružnice r_{M1}).
- Průsečíky horizontální hlavní přímky $h_{1\sigma}$ s rovnoběžkovou kružnicí r_{M1} (získáme půdorysy X_1 a Y_1 bodů řezu X a Y , které odvodíme do nárýsu).
- Postup ještě jednou opakujte.

Další body řezu lze opět ukázat v již vyřešeném příkladu v programu Geogebra pokud budeme pohybovat bodem A .



3) Na kterém z následujících obrázků vznikne rotační paraboloid. Tvořící křivka k a osa rotačního pohybu o jsou zadané následujícími způsoby? (správnou odpověď zakroužkujte)



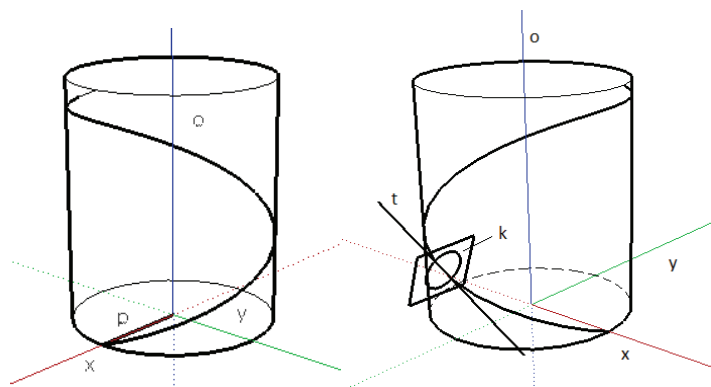
PŘÍLOHA B

Pracovní list – šroubové plochy

Jaké pohyby musíme spojit, aby vznikl šroubový pohyb?

.....

Na obrázcích vlevo jsou naznačeny principy vzniku dvou různých šroubových ploch. Jakými prvky obecně je určena šroubová plocha?



.....
.....
.....
.....

Co je redukovaná výška závitu? (Vysvětlete pojem.)

.....
.....

Jak nazýváme řez rovinou, která prochází osou šroubového pohybu?

.....

Jak nazýváme řez rovinou, která je kolmá na osu šroubového pohybu?

.....

Na následujících obrázcích určete, o jaký ze dvou základních typů šroubových ploch se jedná (přímková šroubová plocha, cyklická šroubová plocha?)



.....

Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha



Pohybem jaké rovinné křivky vytvoříme helikon („schodovou“ plochu)?

.....

Jakou polohu má tvořící křivka vůči ose šroubového pohybu?

.....

Do jakých ploch (kromě šroubových) lze tuto plochu zařadit a proč?

.....

.....

S využitím internetu uveďte alespoň dva příklady, kde lze využít pravoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu (kromě schodiště)?

.....

Lednice, Bouzov, to jsou zámky, v nichž mají schodiště levotočivý směr. S využitím internetu naleznete důvod, proč se schodiště na zámcích a hradech stavěla levotočivá a uveďte ještě alespoň dva příklady (zámku nebo hradu), kde je tomu také tak. (!!! Pozor, co je geometricky levotočivé, stavitelé nazývají pravotočivé, aby vás to na internetu nemátlo.)

.....

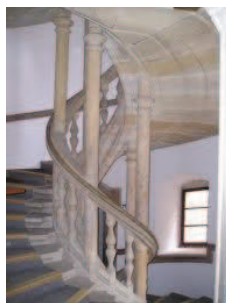
.....

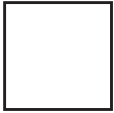
.....

Zámek Lednice:



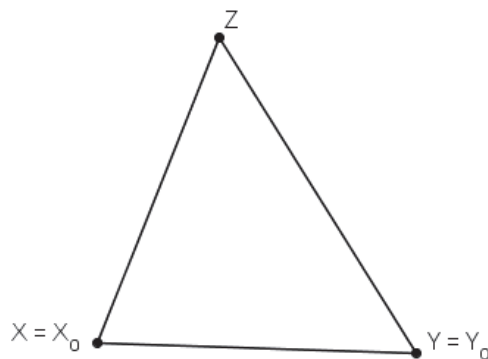
Zámek Bouzov:





1) V následující axonometrii sestrojte schodovou plochu, která vzniká šroubovým pohybem úsečky AB o souřadnicích bodů $A = [4, 0, 0]$, $B = [0, 0, 0]$ a výška jednoho závitu $v = 6$. Šroubová plocha je levotočivá.

(webové stránky: Schodová plocha – Příklad 1)



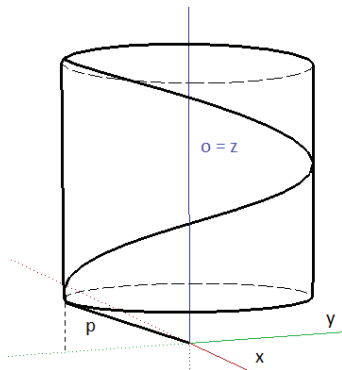
- Osy x , y a z se v pravouhlé axonometrii promítají do výšek axonometrického trojúhelníku XYZ .
- V průsečíku os získáme bod B_1 a zároveň bod B .
- Rovinu xy otočíme kolem přímky XY a získáme otočené osy x_0 a y_0 (využijte Thaletovu kružnici).
- Přímka XY je osou afinity o_A .
- Pomocí otočených os, na kterých se vynášejí skutečné jednotky a osové afinity sestrojíme půdorys bodu A_1 .
- Pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem úsečky AB .
- Rovinu xz otočíme kolem přímky XZ a získáme otočenou osu z_0 (využijte Thaletovu kružnici), pomocí které vyneseme výšku jednoho závitu ($|BB_1| = 6$).
- V otočené rovině xy zvolíme bod A'_0 .
- V osové afinitě převedeme bod A'_0 na bod A_{Pom} od kterého budeme vynášet výšku, kterou vypočítáme podle vzorce uvedeného ve výukových materiálech.
- Po vnesení této vypočítané výšky získáme bod A' a zcela analogicky sestrojíme bod B' .

- Další poloha úsečky AB je úsečka $A'B'$.

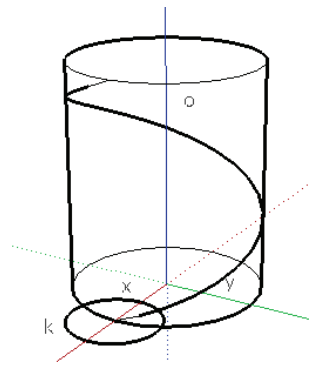
Pro všechna řešení lze opět využít řešení v programu Geogebra. Pokud budeme pohybovat bodem A'_0 , můžeme sledovat další polohy úsečky AB .

2) Na kterém z následujících obrázků vznikne pravoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha a vysvětlete proč. Víme že, k popř. p je tvořící křivka a o je osa šroubového pohybu?

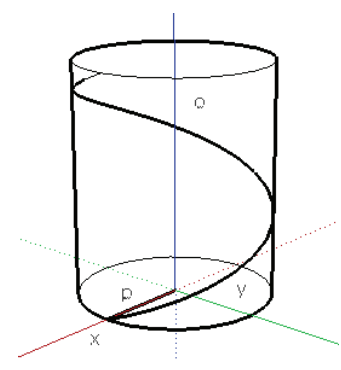
a)



b)



c)

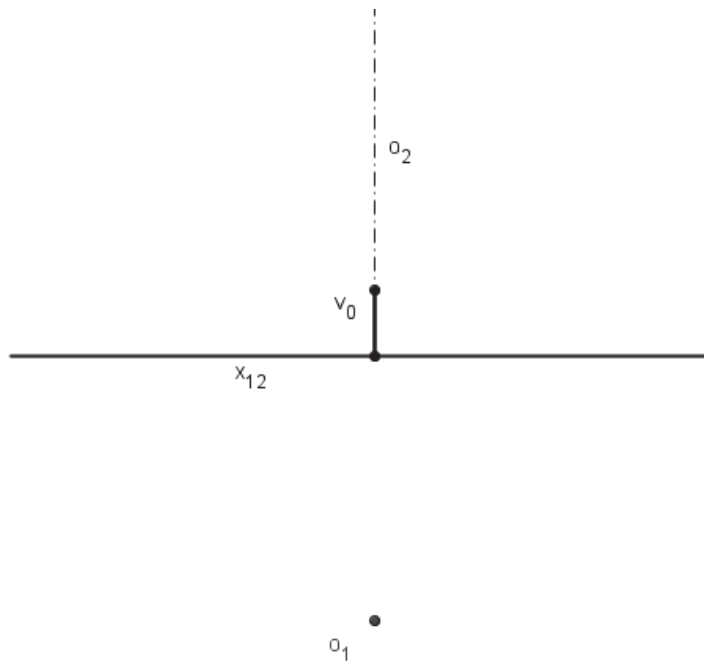


1) Které z následujících tvrzení o schodové ploše je správně?

- Schodová plocha vzniká rotačním pohybem přímky.
- Schodová plocha je tvořena přímkou, která neprochází osou šroubového pohybu a je s touto osou mimoběžná.
- Schodovou plochu řadíme mezi cyklické šroubové plochy.
- Schodová plocha je tvořena přímkou, která prochází osou šroubového pohybu a je na tuto osu kolmá.

2) V Mongeově promítání sestrojte jeden závit schodové plochy, která vznikne šroubovým pohybem úsečky XY . Body X a Y mají následující souřadnice $X = [0, 4, 0]$, $Y = [2.5, 4, 0]$. Šroubový pohyb $(o, v_0, +)$, je určen osou $o \perp$ na půdorysnu, redukováná výška závitu $v_0 = 1$ a pravotočivým směrem.

(webové stránky: Schodová plocha – Příklad 2)



- Podle pravidel Mongeova promítání vyneste body X , Y a příslušnou úsečku XY .
- Bod X se bude pouze posouvat ve směru osy a bod Y bude konat šroubový pohyb (podstava válce, podél kterého se bude bod Y šroubovat, je v půdoryse určen kružnicí k_1 se středem X_1 a poloměrem $|X_1Y_1|$).
- Na obvodu podstavy válce zvolíme bod Y' (bod $Y'_1 \in k_1$).
- Dále provedeme buďto rozvinutí šroubovice a zjistíme, do jaké výšky vystoupá bod A vzhledem k oblouku, který přísluší úhlu α nebo opět vypočítáme výšku přímo ze vzorce, uvedeného ve výukových materiálech .
- Na základě této výšky sestrojíme nárys Y'_2 bodu Y' a analogicky nárys X'_2 bodu X'
- Další poloha úsečky XY je dána úsečkou $X'Y'$.

Pro všechna řešení lze opět využít program Geogebra. Pokud budeme pohybovat bodem Y'_1 , můžeme sledovat další polohy úsečky XY .

Kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha



Pohybem jaké rovinné křivky vytvoříme vývrtkovou plochu?

.....

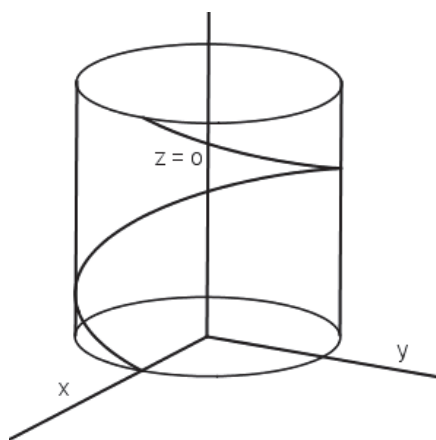
Jakou polohu má tvořící křivka vůči ose šroubového pohybu?

.....

Kde je možné využít kosoúhlou uzavřenou přímkovou šroubovou plochu (najděte alespoň dva příklady)?

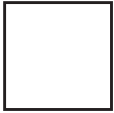
.....

V následujícím obrázku načrtněte tvořící křivku vývrtkové plochy, vyznačte osu šroubového pohybu a načrtněte několik dalších poloh tvořící křivky (povrchové přímky plochy).



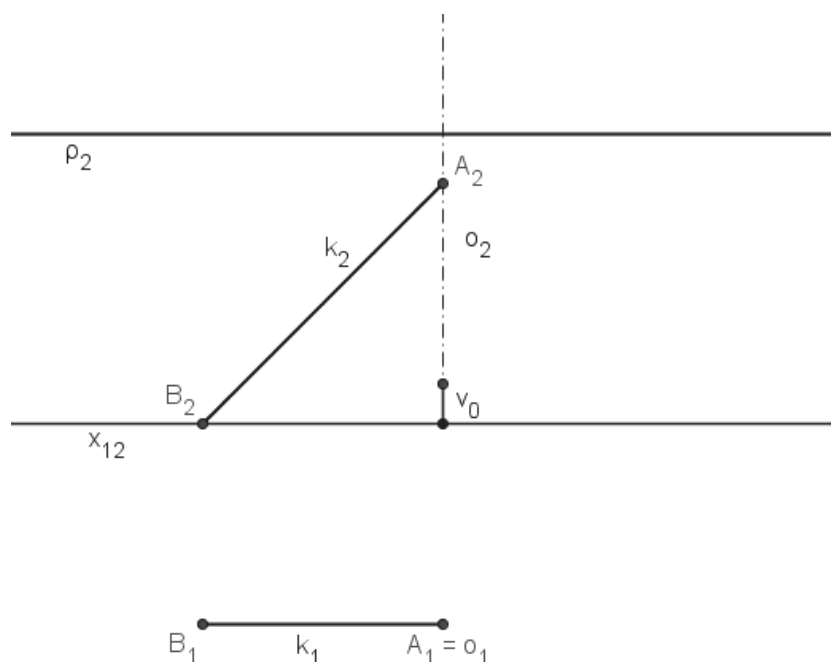
Využijte internetu a pokuste se nalézt důvod, proč je pro různé vrtáky využívána kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha a ne pravoúhlá.

.....



- 1) Sestrojte alespoň 1 bod řezu kosouhlé uzavřené přímkové šroubové plochy rovinou ρ , která je kolmá na osu šroubového pohybu. Plocha vznikne šroubováním úsečky AB se souřadnicemi $A = [0, 5, 6]$, $B = [-6, 5, 0]$ a šroubovým pohybem $(o, v_0, +)$, viz následující obrázek.

(webové stránky: Vývrtková plocha – Příklad 1)

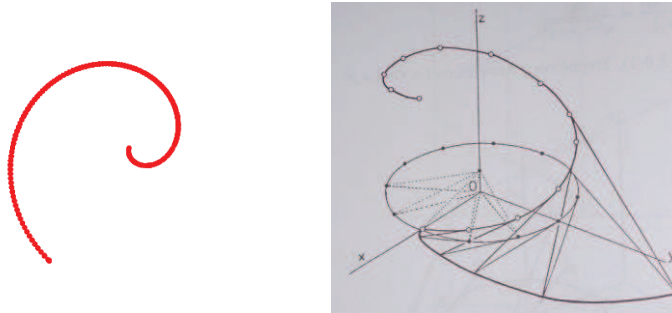


- Podle pravidel Mongeova promítání vyneste body X a Y a příslušnou úsečku XY , kterou označíme k (tvořící křivka).
- Na tvořící křivce zvolíme bod X (například $X_1 \in k_1$ a odvodíme narys X_2).
- Dále provedeme rozvinutí šroubovice a zjistíme, jaký oblouk přísluší vzdálenosti bodu X od roviny ρ (vzdálenost X_2 od $PomV_X$).
- Tento oblouk následně nanese na obvod podstavu válce, podél něhož se bod X šroubuje a získáme půdorys X'_1 bodu X' .
- Narys X'_2 leží v rovině ρ .

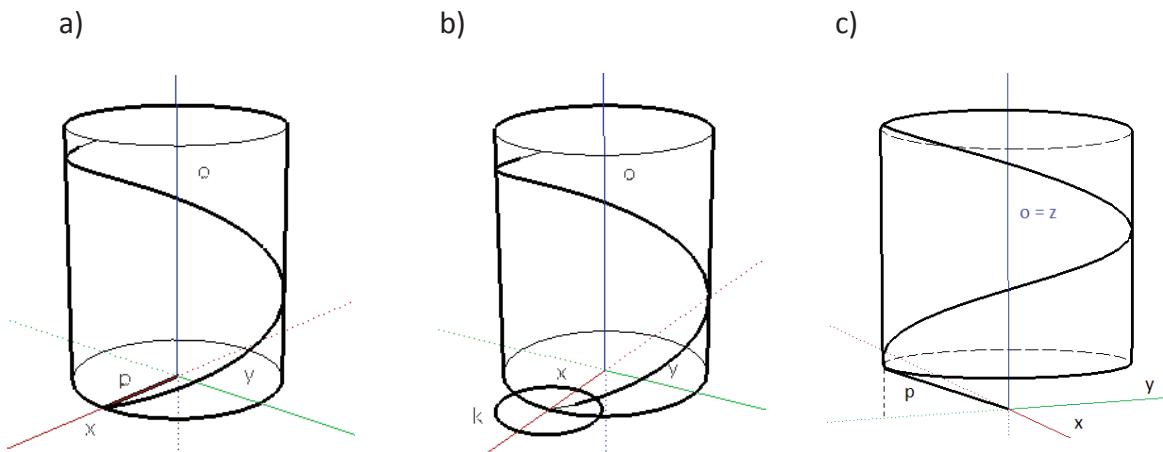
Budeme-li pohybovat bodem X_1 , můžeme sledovat další body řezu kosouhlé uzavřené přímkové šroubové plochy.

Tímto příčným řezem bude část rovinné křivky, která se nazývá „**evolventa šroubovice**“. Evolventa křivky vzniká následujícím způsobem. Na křivce zvolíme jeden pevný bod například X . Dále budeme volit další body na křivce X_1, X_2, \dots a v každém tomto bodě zkonstruujeme tečnu ke křivce. Na tečnu bodem X_1 budeme nanášet délku oblouku mezi body X a X_1 . Na tečnu bodem X_2 budeme nanášet délku oblouku mezi body X a X_2 atd. Body, které vzniknou nanesením délek příslušných oblouků, jsou body evolventy.

Na následujících obrázcích jsou zobrazeny části evolventy šroubovice. Vlevo je část evolventy šroubovice, kterou budeme konstruovat při řešení tohoto příkladu v programu Geogebra řezem rovinou ρ , viz zadání výše. Vpravo je naznačen způsob tvorby evolventy šroubovice.



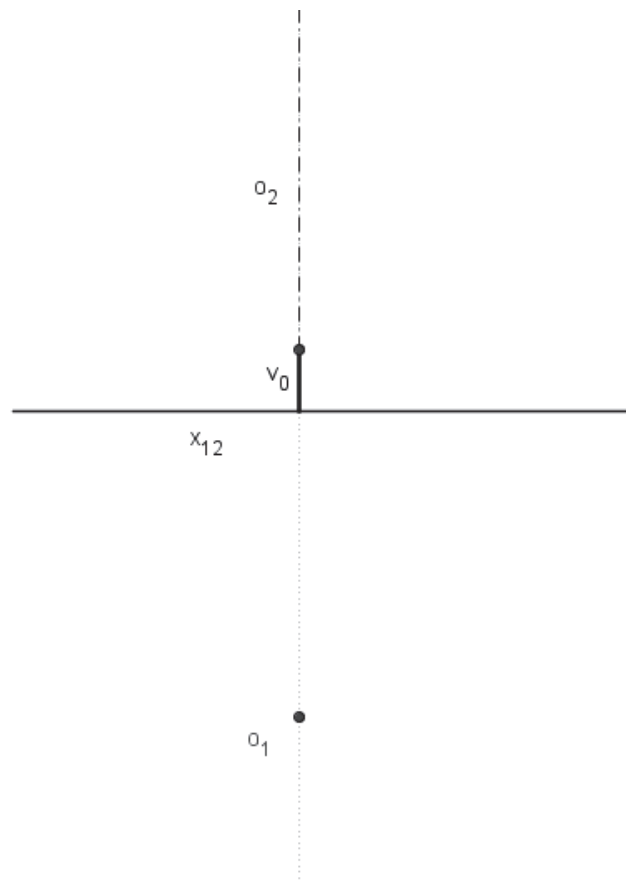
2) Na kterém z následujících obrázků vznikne kosoúhlá uzavřená přímková šroubová plocha a vysvětlete proč, víme-li že, k popř. p je tvořící křivka a o je osa šroubového pohybu?



1) Vysvětlete, jaký je rozdíl mezi schodovou a vývrtkovou plochou a načrtněte jejich obrázky?

- 2) Sestrojte jeden závit šroubu s ostrým závitem. Tento závit vzniká šroubováním dvou úseček. Úsečka **AB** se souřadnicemi bodů $A = [0, 5, 2]$, $B = [2, 5, 0]$ a úsečka **CD** s body $C = [0, 5, -2]$, $D = [2, 5, 0]$. Šroubový pohyb ($o, v_o, +$), je určen osou $o \perp$ na půdorysnu, redukovaná výška závitu $v_o = 1$ a pravotočivým směrem.

(webové stránky: Vývrtková plocha – Příklad 2)



- Podle pravidel Mongeova promítání vynesete body **A, B, C a D** a příslušné úsečky **AB a CD**.
- Body **A a C** se budou pouze posouvat ve směru osy a body **B a D** budou konat šroubový pohyb (podstava válce, podél kterého se budou body **B a D** šroubovat je v půdoryse určen kružnicí k_1 se středem A_1 a poloměrem $|A_1B_1|$).
- Na obvodu podstavy válce zvolíme bod B' , který se shoduje s bodem D' (platí, že bod $B'_1 \in k_1$).

- Dále provedeme buďto rozvinutí šroubovice a zjistíme, do jaké výšky vystoupají body B a D vzhledem k oblouku, který přísluší úhlu α nebo opět vypočítáme výšku přímo ze vzorce, uvedeného ve výukových materiálech .
- Na základě této výšky sestrojíme nárys B'_2 bodu B' a analogicky nárys A'_2 bodu A'
- Další poloha úsečky AB je dána úsečkou $A'B'$.
- Na základě této výšky sestrojíme také nárys D'_2 bodu D' ($D'_2 = B'_2$) a analogicky nárys C'_2 bodu C' .
- Další poloha úsečky CD je dána úsečkou $C'D'$.

Pro všechna řešení lze opět využít program Geogebra. Pokud budeme pohybovat bodem B'_1 , můžeme sledovat další polohy úseček AB a CD .

Cyklické šroubové plochy



Pohybem jaké rovinné křivky vznikají cyklické šroubové plochy?

.....

Podle polohy tvořící křivky rozlišujeme tři typy cyklických šroubových ploch, napište názvy těchto ploch a popište, jak vznikají?

.....

.....

.....

Do jakých ploch (kromě šroubových) lze zařadit Archimédovu serpentinu?

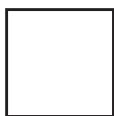
.....

S využitím internetu najděte název pro metodu, kterou řezbáři či tesaři vytvářeli vinutý sloupek, pro jakou dobu byl vinutý sloupek charakteristický, a uveďte alespoň tři příklady využití.

.....

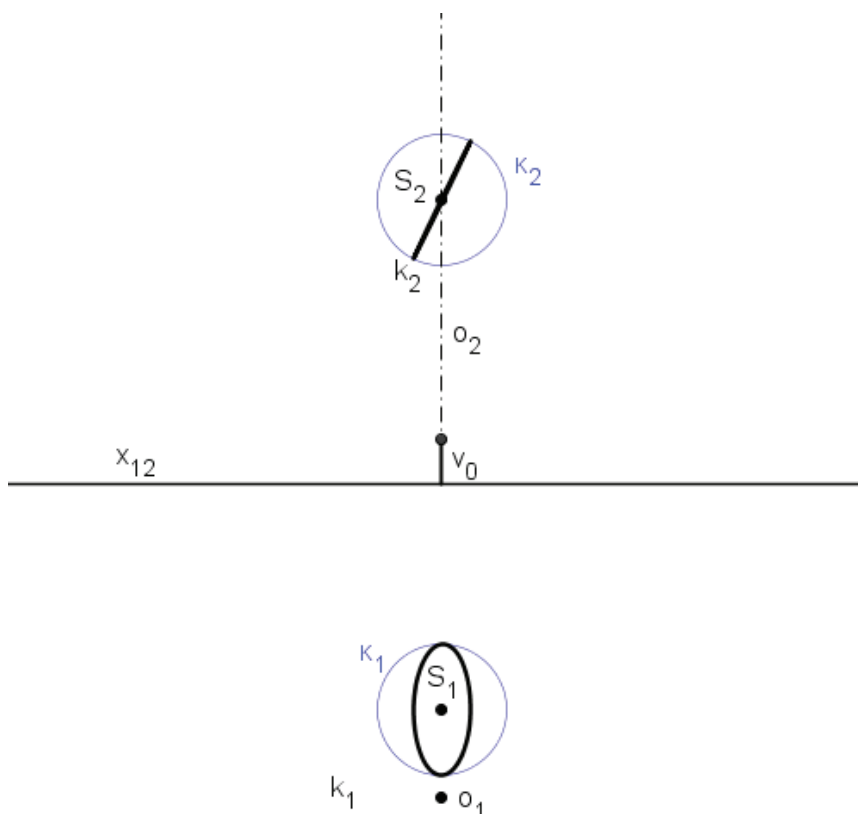
.....

.....



1) Sestrojte alespoň 1 bod hlavního meridiánu Archimédovy serpentiny, která vznikne šroubováním kružnice k a šroubovým pohybem (o , $v_0 = 1$, $+$), viz následující obrázek.

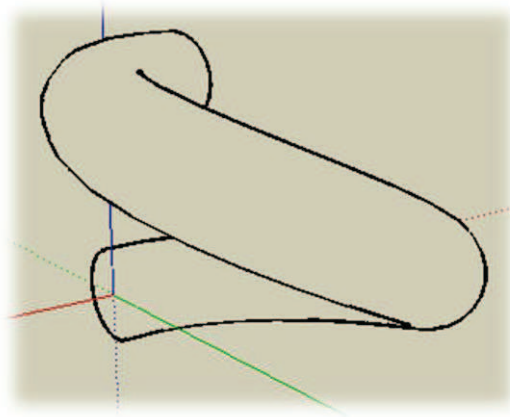
(webové stránky: Cyklické šroubové plochy – Příklad 1)



- Na tvořící křivce zvolíme libovolný bod X ($X_1 \in k_1$).
- Bod X přešroubojeme do roviny hlavního meridiánu bod X' (bod $X'_1 \in m_1$).
- Odvodíme nárys X_2 bodu X (dva splývající body X_{2a} a X_{2b} označeny jako X_2).
- Nárysem X_2 vedeme pomocnou rovinu α - nárys přímka α_2 (od této roviny budeme určovat výšku nárysu X'_2 bodu X').
- Tuto výšku odvodíme z grafu rozvinuté šroubovice.
- Sestrojíme nárys X'_2 bodu X' (bod hlavního meridiánu Archimédovy serpentiny).

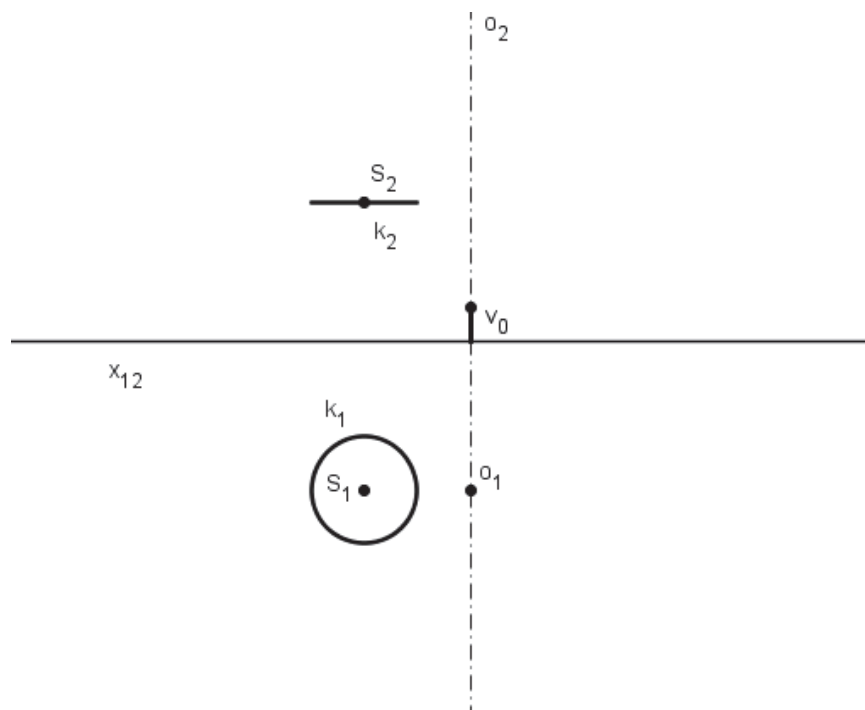
Budeme-li pohybovat bodem X_1 , můžeme sledovat další body meridiánu Archimédovy serpentiny, které vykreslují celý hlavní meridián plochy.

- 2) V následujícím obrázku vyznačte, šroubovici středu tvořící kružnice, několik poloh této tvořící křivky a plochou proložte takovou plochu, aby bylo splněno, že šroubováním této plochy vznikne obalová plocha (Archimédova serpentina).



- 3) Sestrojte alespoň 1 bod hlavního meridiánu vinutého sloupku, který vznikne šroubováním kružnice k a šroubovým pohybem (o , $v_0 = 1, +$), viz následující obrázek.

(webové stránky: Cyklické šroubové plochy – Příklad 2)

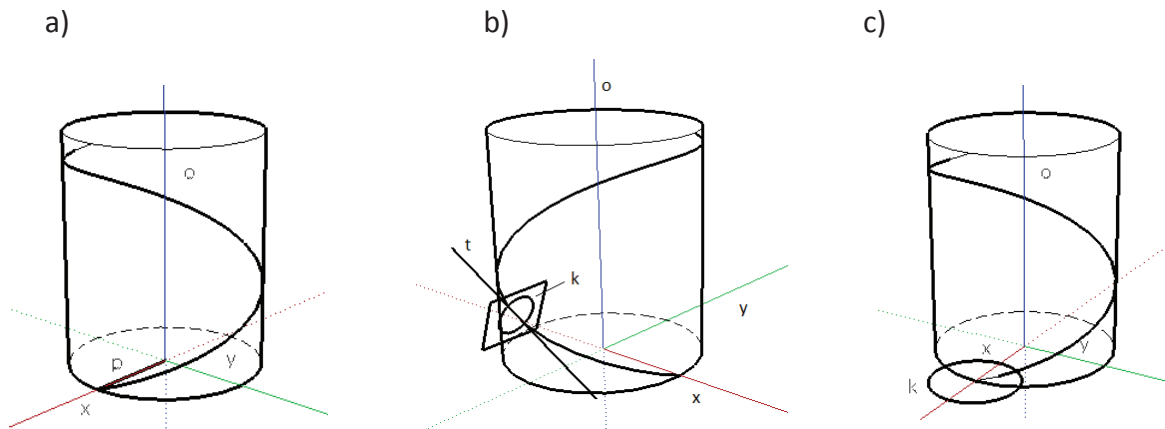


- Na tvořící křivce zvolíme libovolný bod X ($X_1 \in k_1$).
- Bod X přešroubujeme do roviny hlavního meridiánu bod X' (bod $X'_1 \in m_1$).
- Odvodíme nárys X_2 bodu X (dva splývající body X_{2a} a X_{2b} označeny jako X_2).
- Nárysem X_2 vedeme pomocnou rovinu α - nárys přímka α_2 (od této roviny budeme určovat výšku nárysu X'_2 bodu X').
- Tuto výšku odvodíme z grafu rozvinuté šroubovice.
- Sestrojíme nárys X'_2 bodu X' (bod hlavního meridiánu vinutého sloupku).

Budeme-li pohybovat bodem X_1 , můžeme sledovat další body meridiánu vinutého sloupku, které vykreslují celý hlavní meridián plochy.



1) Na kterém z následujících obrázků vznikne cyklická šroubová plocha a jak ji nazýváme, víme-li že, k příp. p je tvořící křivka a o je osa šroubového pohybu?

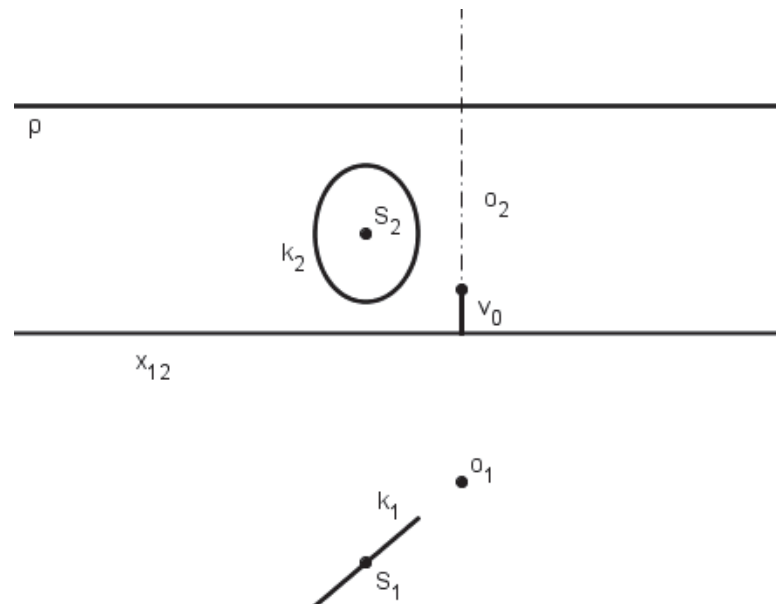


2) Které z následujících tvrzení o ploše Archimédovy serpentiny je správně?

- Archimédova serpentina vzniká rotačním pohybem kružnice, jejíž střed leží na ose rotačního pohybu.
- Archimédova serpentina vzniká šroubovým pohybem přímky kolmé na osu šroubového pohybu.
- Archimédova serpentina vzniká šroubovým pohybem kružnice, která leží v rovině kolmé na osu šroubového pohybu.
- Archimédova serpentina vzniká šroubovým pohybem kružnice ležící v rovině kolmé na tečnu šroubovice.

- 3) Sestrojte alespoň 1 bod řezu osové cyklické šroubové plochy rovinou ρ , která je kolmá na osu šroubového pohybu. Osová cyklická šroubová plocha vznikne šroubováním kružnice k a šroubovým pohybem ($o, v_o = 1, +$), viz následující obrázek.

(webové stránky: Cyklické šroubové plochy – Příklad 3)



- Na tvořící křivce zvolíme bod X (například $X_2 \in k_2$ a odvodíme půdorys X_2).
- Dále provedeme rozvinutí šroubovice a zjistíme, jaký oblouk přísluší vzdálenosti bodu X od roviny ρ (vzdálenost X_2 od $PomV_x$).
- Tento oblouk následně nanese na obvod podstavy válce, podél něhož se bod X šroubuje a získáme půdorys X'_1 bodu X' .
- Narys X'_2 leží v rovině ρ .

Budeme-li pohybovat bodem X_2 , můžeme sledovat další body řezu osové cyklické šroubové plochy.

PŘÍLOHA C

Pracovní list – přímkové plochy

Pohybem jaké rovinné křivky vznikají tyto plochy?

.....

Jakou polohu mají povrchové přímky konoidů?

.....

Vysvětlete, jaký je rozdíl mezi rozvinutelnou přímkovou plochou a zborcenou přímkovou plochou vzhledem k povrchovým přímkám plochy?

.....

.....

Jmenujte alespoň jeden příklad rozvinutelné přímkové plochy.

.....

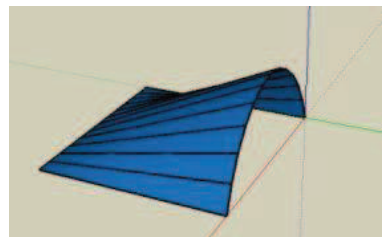
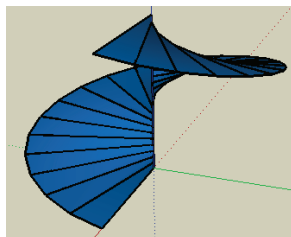
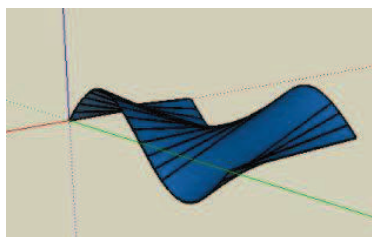
Jmenujte alespoň jeden příklad zborcené přímkové plochy.

.....

Kterými prvky jsou určeny konoidy?

.....

Konoidy nazýváme podle řídící křivky, jak nazýváme konoidy na následujících obrázcích?



.....

Hyperbolický paraboloid



Proč se pro plochu hyperbolického paraboloidu užívá názvu sedlová plocha?

.....

Pokud plochu hyperbolického paraboloidu zařadíme mezi translační plochy, vysvětlete princip jejího vzniku?

.....

.....

.....

Co je zborcený čtyřúhelník (vysvětlete pojem)?

.....

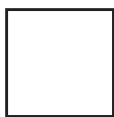
.....

Hyperbolický paraboloid je speciálním typem konoidu, jakými prvky je určen?

.....

Kde je možné využít plochu hyperbolického paraboloidu?

.....



- 1) Napište vektorové vyjádření mimoběžných přímk \mathbf{a} , \mathbf{b} plochy hyperbolického paraboloidu, jestliže přímka $\mathbf{a} = BC$ a $\mathbf{b} = AD$. Souřadnice bodů jsou $\mathbf{A} = [0, 0, 2]$, $\mathbf{B} = [3, 0, 0]$, $\mathbf{C} = [3, 4, 0]$ a $\mathbf{D} = [0, 4, 0]$. Načrtněte obrázek.

2) Vyberte obrázky, na nichž se nachází plocha hyperbolického paraboloidu

a)



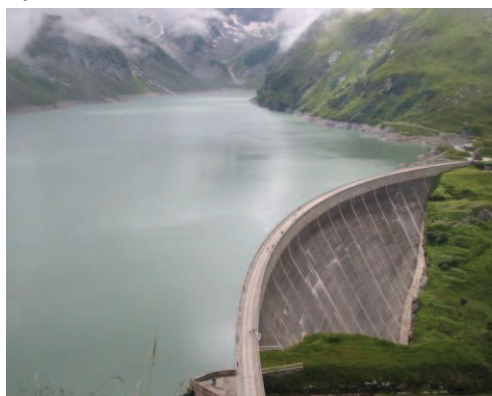
b)



c)

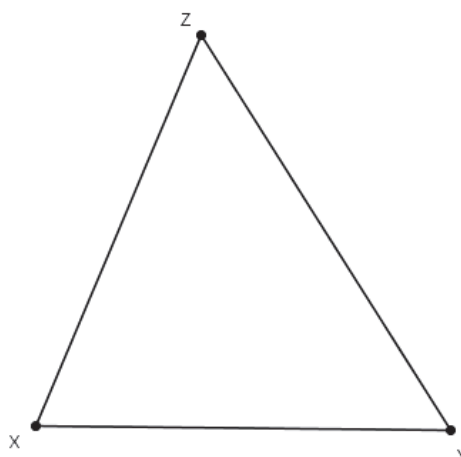


d)



3) V pravouhlé axonometrii, určené trojúhelníkem XYZ , sestrojte zastřešení pomocí plochy hyperbolického paraboloidu, který je dán body $A = [0, 0, 2]$, $B = [3, 0, 0]$, $C = [3, 4, 0]$ a $D = [0, 4, 0]$. První regul hyperbolického paraboloidu je určen úsečkami BC , AD a druhý regul je určen úsečkami AB , CD .

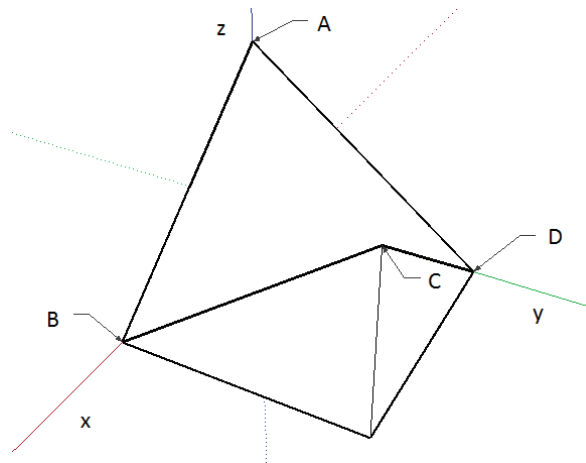
(webové stránky: Hyperbolický paraboloid – Příklad 1)



- Osy x , y a z se v pravouhlé axonometrii promítají do výšek axonometrického trojúhelníku XYZ .
- Rovinu xy otočíme kolem přímky XY a získáme otočené osy x_0 a y_0 (využijte Thaletovu kružnici).
- Rovinu xz otočíte kolem přímky XZ a získáte otočenou osu z_0 (opět využijte Thaletovu kružnici).
- Pomocí otočených os, na které se vynášejí skutečné jednotky, sestrojíme zadané body A , B , C a D .
- Hyperbolický paraboloid je určen úsečkami AB , CD a BC , AD .
- Rozpůlíme-li úsečky AB a CD a tyto středy spojíme, pak získáme úsečku jednoho regulu plochy, analogicky bychom půlením úseček BC a AD získali úsečku druhého regulu.
- Zvolíme-li libovolný bod X_V na úsečce CD , pak půdorys povrchové přímky procházejí tímto bodem je rovnoběžný s rovinou yz → kde půdorys povrchové přímky protne půdorys úsečky AB , získáme půdorys bodu Y_V – úsečka $X_V Y_V$ je jedna z povrchových úseček plochy.
- Analogickým způsobem získáme $W_V Z_V$ povrchovou úsečku druhého regulu plochy.

Ve vyřešeném příkladu v Geogebra lze ukázat, jak se budou měnit úsečky jednotlivých regulů plochy, pokud budeme pohybovat body Z_V a Y_V . Zároveň lze pozměnit i zadanou pravouhlou axonometrii, pokud budeme pohybovat body zadaného trojúhelníku XYZ .

- 4) Mějme zadán následující zborcený čtyřúhelník $ABCD$. Do obrázku doplňte povrchové přímky hyperbolického paraboloidu.



5) Jak se v axonometrii nazývá metoda pro určování průsečíku přímky s rovinou?

.....

6) Zkuste vymyslet, jak se bude postupovat při konstrukci řezu hyperbolického paraboloidu. (Zohledněte předchozí dvě otázky a odpovědi.)

.....

7) Určete (popřípadě vyhledejte na internetu), jaká rovinná křivka vznikne řezem hyperbolického paraboloidu rovinou ρ , která je:

a) rovnoběžná s osou plochy a rovnoběžná s jednou z řídících rovin?

.....

b) rovnoběžná s osou plochy, ale různoběžná s řídící rovinou?

.....

c) různoběžná s osou plochy a zároveň je tečnou rovinou plochy?

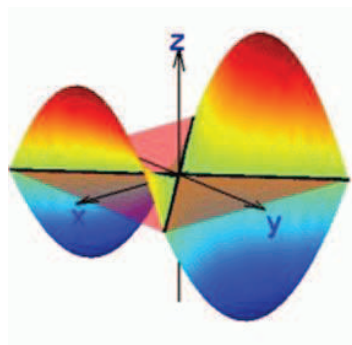
.....

d) různoběžná s osou plochy a zároveň není tečnou rovinou plochy?

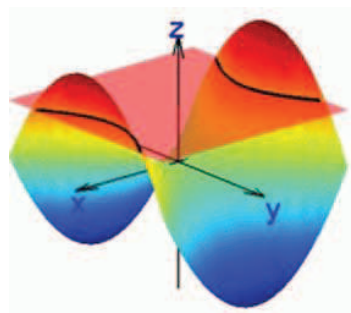
.....

Jednotlivé možnosti přiřaďte k následujícím obrázkům.

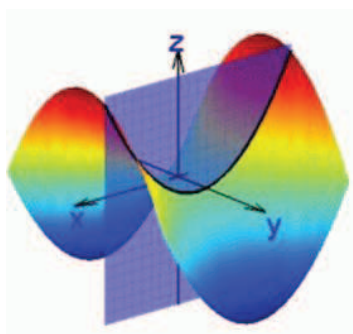
A)



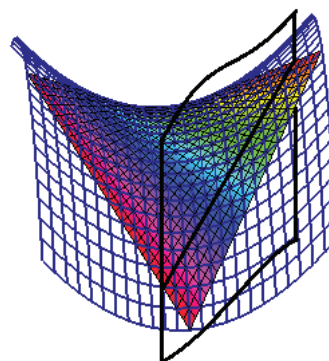
B)



C)

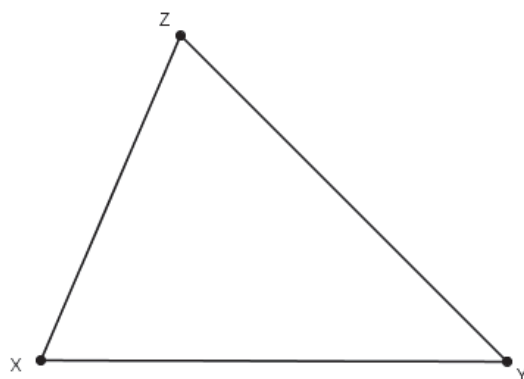


D)



- 1) V pravouhlé axonometrii určené trojúhelníkem XYZ sestrojte zastřešení pomocí plochy hyperbolického paraboloidu, který je určen body o souřadnicích $A = [0, 0, 0]$, $B = [4, 0, 0]$, $C = [4, -1, 3]$ a $D = [0, 1, 3]$. Povrchové úsečky jednoho regulu jsou dány úsečkami AB a CD . Druhý regul je určen úsečkami BC , AD . Načrtněte tři povrchové přímky každého regulu plochy.

(webové stránky: Hyperbolický paraboloid – Příklad 2)



- Osy x , y a z se v pravouhlé axonometrii promítají do výšek axonometrického trojúhelníku XYZ .
- Rovinu xy otočíme kolem přímky XY a získáme otočené osy x_0 a y_0 (využijte Thaletovu kružnici).
- Rovinu xz otočíte kolem přímky XZ a získáte otočenou osu z_0 (opět využijte Thaletovu kružnici).
- Pomocí otočených os, na které se vynášejí skutečné jednotky, sestrojíme zadané body A , B , C a D .
- Hyperbolický paraboloid je určen úsečkami AB , CD a BC , AD .
- Rozpůlíme-li úsečky AB a CD a tyto středy spojíme, pak získáme úsečku jednoho regulu plochy, analogicky bychom půlením úseček BC a AD získali úsečku druhého regulu.
- Zvolíme-li libovolný bod X_V na úsečce AB , pak nárys povrchové přímky procházejí tímto bodem je rovnoběžný s rovinou yz → sestrojíme úsečku $X_V Y_V$ jednu z povrchových úseček plochy.
- Analogickým způsobem získáme $W_V Z_V$ povrchovou úsečku druhého regulu plochy.

Ve vyřešeném příkladu v Geogebře lze ukázat, jak se budou měnit úsečky jednotlivých regulů plochy, pokud budeme pohybovat body X_V a W_V . Zároveň lze pozměnit i zadanou pravouhlo axonometrii, pokud budeme pohybovat body zadaného trojúhelníku XYZ .

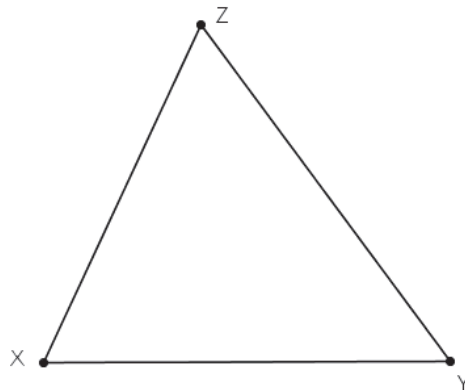
- 2) V pravouhlé axonometrii zadané trojúhelníkem XYZ sestrojte plochu hyperbolického paraboloidu, který je dán body $A = [-4, -4, 3]$, $B = [4, -4, 1]$, $C = [4, 4, 3]$ a $D = [-4, 4, 1]$. Dále sestrojte řez rovinou ρ , která je dána body B_1 , B , D_1 , D a rovinou σ , která je určena body A_1 , A , C_1 , C .

(webové stránky: Hyperbolický paraboloid – Příklad 3)

- Hyperbolický paraboloid je určen úsečkami AB , CD a BC , AD (postup analogický jako u předchozích příkladů).
- Půdorysná stopa roviny ρ splývá s úhlopříčkou $B_1 D_1$ a nárysná stopa splývá s osou z .
- Půdorysná stopa roviny σ splývá s úhlopříčkou $A_1 C_1$ a nárysná stopa splývá opět s osou z .
- Zvolíte-li libovolný bod X_V na úsečce BC , pak pomocí rovnoběžného půdorysu povrchové přímky s rovinou xz získáte úsečka $X_V Y_V$ jednu z povrchových úseček plochy.

- Půdorys úsečky $X_V Y_V$ protne půdorysnou stopu roviny ρ v bodě $P_1 \rightarrow$ bodem P_1 prochází také půdorys úsečky $W_V Z_V$.
- Zkonstruuje povrchovou úsečku $W_V Z_V$.
- Průsečík úseček $X_V Y_V$ a $W_V Z_V$ je bod $P \rightarrow$ bod řezu hyperbolického paraboloidu rovinou ρ (můžete se přesvědčit, že body P a P_1 leží na rovnoběžce s osou z).
- Půdorys úsečky $X_V Y_V$ protne také půdorysnou stopu roviny σ v bodě $Q_1 \rightarrow$ bodem Q_1 prochází také půdorys úsečky $W'_V Z'_V$.
- Zkonstruuje povrchovou úsečku $W'_V Z'_V$.
- Průsečík úseček $X_V Y_V$ a $W'_V Z'_V$ je bod $Q \rightarrow$ bod řezu hyperbolického paraboloidu rovinou σ (můžete se přesvědčit, že body Q a Q_1 opět leží na rovnoběžce s osou z).

Ve vyřešeném příkladu v Geogebře lze ukázat, jak se budou měnit úsečky jednotlivých regulů plochy, pokud budeme pohybovat bodem X_V . Je také vidět, že se průsečíky jednotlivých povrchových úseček pohybují po příslušných parabolách, jejichž průsečík leží ve středu plochy (vrchol hyperbolického paraboloidu).



- 3) Které z následujících tvrzení o hyperbolickém paraboloidu je správně?
- Hyperbolický paraboloid je druh konoidu, jehož řídicí křivkou je parabola.
 - Hyperbolický paraboloid je translační plocha vzniklá posunutím paraboly po přímce kolmé k rovině této paraboly a procházející jejím vrcholem.
 - Hyperbolický paraboloid je tvořen povrchovými přímkami, které spojují body řídicí paraboly s body řídicí přímky.
 - Hyperbolický paraboloid je druh konoidu, jehož řídicí křivkou je přímka.

Přímý parabolický konoid



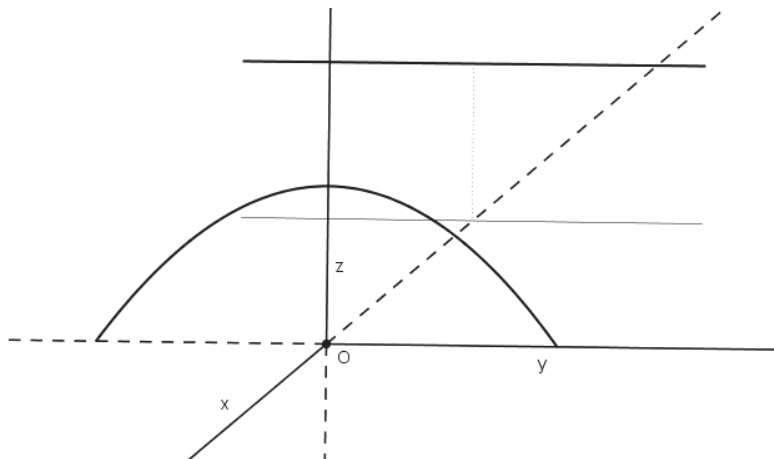
Jakými prvky je určena plocha přímého parabolického konoidu?

.....

Co to znamená, když se řekne o konoidu, že je přímý?

.....

V následujícím obrázku určete řídicí křivku, řídicí přímku a načrtněte povrchové přímky plochy tak, aby byla splněna podmínka, že se jedná o přímý parabolický konoid.

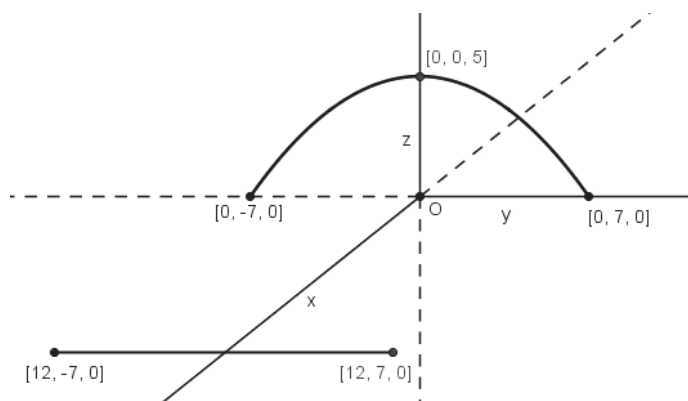


Jaké rovinné křivky vzniknou řezy přímého parabolického konoidu rovinami rovnoběžnými s rovinou řídicí křivky?

.....

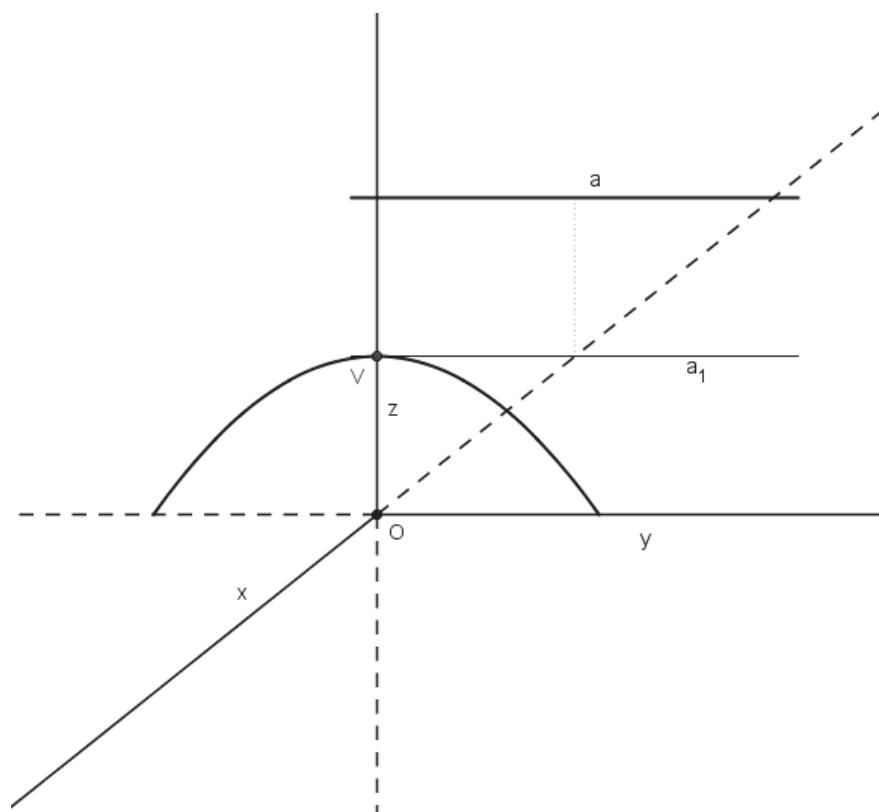


- 1) Napište parametrické vyjádření přímého parabolického konoidu, jsou-li řídicí křivka a řídicí přímka umístěny podle následujícího obrázku. (Uvažujeme pouze část paraboly pro $z \geq 0$ a pro řídicí přímku uvažujeme část $y \in \langle -7; 7 \rangle$.) Povrchové přímky jsou rovnoběžné s řídicí rovinou xz .



- 2) V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte parabolický konoid, který je dán částí řídicí křivky (paraboly) a částí řídicí přímky a . Povrchové přímky přímého parabolického konoidu jsou rovnoběžné s rovinou xz .

(webové stránky: Přímý parabolický konoid – Příklad 1)

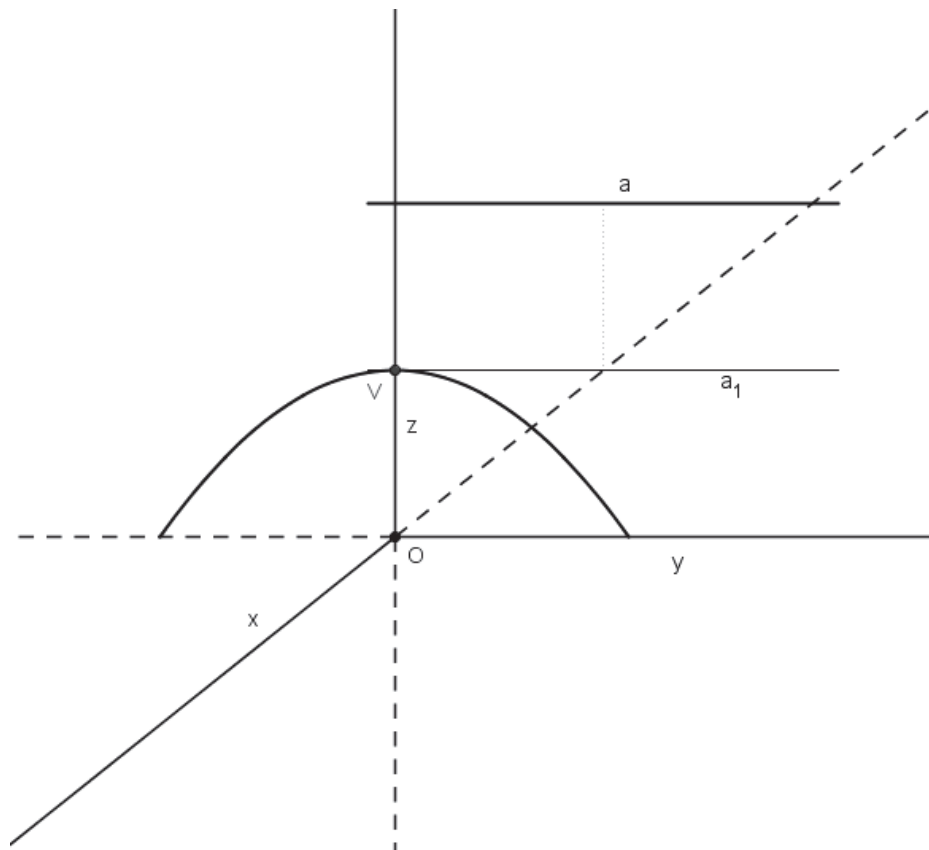


- Koncové body paraboly (body **C** a **D**) spojíme s příslušnými body na přímce **a** (body **A** a **B**) → půdorysy povrchových přímek jsou rovnoběžné s rovinou **xz**.
- Zcela analogicky sestrojíme povrchovou přímku vrcholem **V** paraboly.
- Zvolíme-li libovolný bod **Y** na parabole (volíme půdorys **Y₁** bodu **Y** v prostoru paraboly) a vedeme jím rovnoběžku s rovinou **xz** → na půdoryse úsečky **a** získáme půdorys bodu **X** – přímka **XY** je další povrchovou přímkou plochy.

Ve vyřešeném příkladu v programu Geogebra je bod **Y** pohyblivý, proto pokud s ním budeme pohybovat, pak uvidíme všechny možné polohy povrchových přímek plochy přímého parabolického konoidu.

3) Plocha parabolického konoidu je napojena na valbovou střechu. V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte parabolický konoid, který je dán částí řídicí křivky (paraboly) a částí řídicí přímky **a**. Povrchové přímky přímého parabolického konoidu jsou rovnoběžné s rovinou **xz**. Následně proveďte řez rovinou **a**, která svírá s rovinou paraboly úhel 45° , stejně jako roviny valbové střechy.

(webové stránky: Přímý parabolický konoid – Příklad 2)



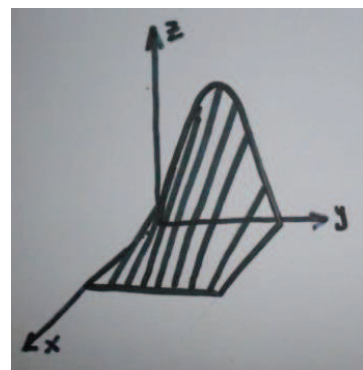
- Opět máme zadány řídicí prvky přímého parabolického konoidu a proto přejdeme ke konstrukci povrchových přímek.
- Zvolíme libovolný bod Y na parabole (volíme půdorys Y_1 bodu Y v prostoru paraboly) a vedeme jím rovnoběžku s rovinou $xz \rightarrow$ na půdoryse úsečky a získáme půdorys bodu X – přímka XY je další povrchovou přímkou plochy.
- Dále máme zkonstruovat řez rovinou α , která svírá s rovinou paraboly úhel 45° (nárysná stopa $n_\alpha \rightarrow$ osa úhlu mezi přímkami x a z , půdorysná stopa $p_\alpha \rightarrow$ osa y).
- Bodem Y (jeho půdorysem) vedeme rovnoběžku s nárysnou stopou roviny α (protože rovinu α tvoří všechny rovnoběžné přímky s nárysnou stopou, které zároveň prochází jednotlivými body půdorysné stopy).
- Průsečík této rovnoběžky s povrchovou přímkou vedenou bodem Y je hledaný bod řezu.
- Sestrojíme-li povrchové přímky koncovými body paraboly a budeme-li zároveň pohybovat bodem Y , vidíme, že okrajové body hledaného řezu splývají s koncovými body paraboly.

Řezem vznikne oblouk, kterého by se měli pokrývači zhruba držet při krytí střechy taškami. Na následujícím obrázku je tento konkrétní příklad využitý při zastřešení rodinného domku.



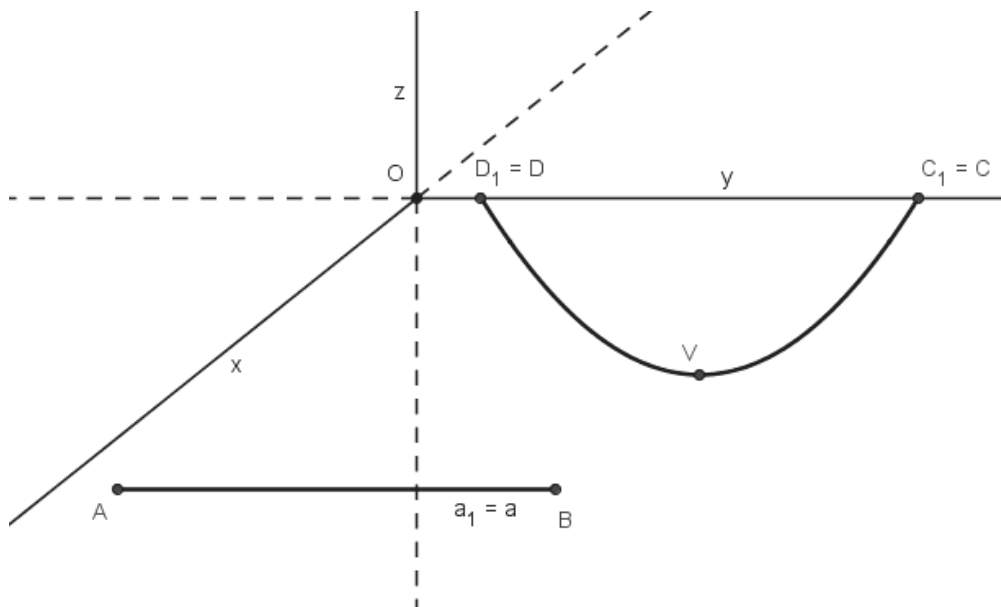
1) Které z následujících tvrzení je správně vzhledem k zadanému obrázku?

- řídící křivka je část přímky ležící v rovině xy a kolmá k rovině yz , povrchové přímky jsou s touto přímkou rovnoběžné
- řídící křivka je část paraboly a povrchové přímky jsou kolmé na řídicí přímkou, která je rovnoběžná s řídicí rovinou
- řídící křivka je část přímky rovnoběžná s řídicí rovinou a kolmá na řídicí přímkou
- řídící křivka je část paraboly ležící v rovině yz a řídicí rovina je zadána rovinou xz



- 2) V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte přímý parabolický konoid, který je dán částí řídicí křivky (paraboly) a částí řídicí přímky a , viz následující obrázek. Povrchové přímky jsou rovnoběžné s rovinou xz .

(webové stránky: Přímý parabolický konoid – Příklad 3)

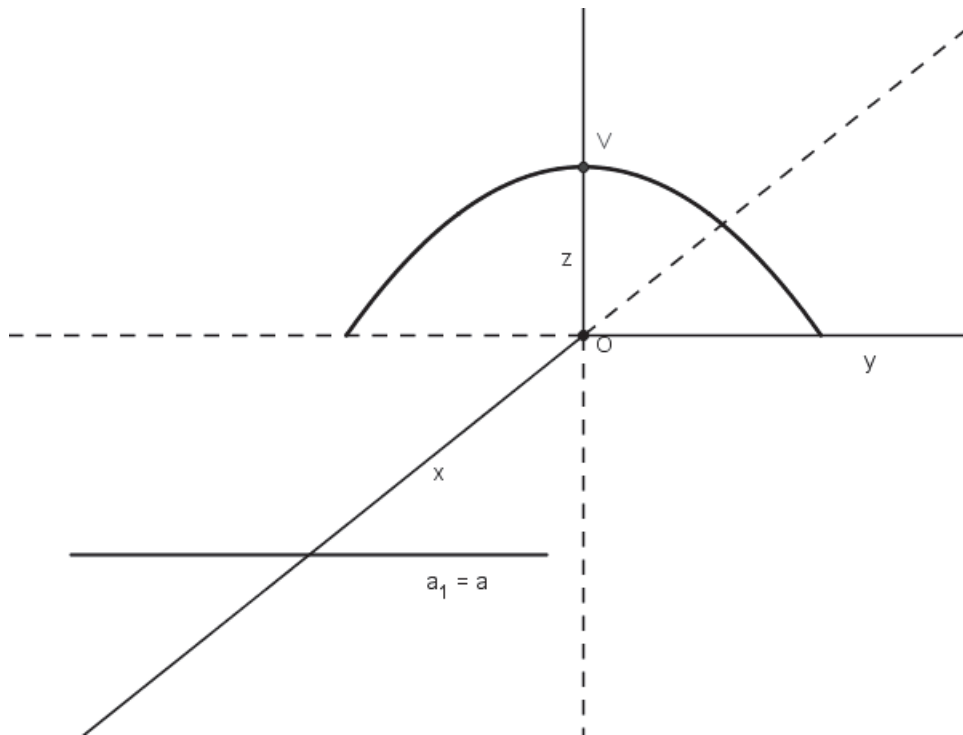


- Koncové body paraboly (body C a D) spojíme s příslušnými body na přímce a (body A a B) → půdorysy povrchových přímek jsou rovnoběžné s rovinou xz .
- Zcela analogicky sestrojíme povrchovou přímku vrcholem V paraboly.
- Zvolíme-li libovolný bod Y na parabole (volíme půdorys Y_1 bodu Y v prostoru paraboly) a vedeme jím rovnoběžku s rovinou xz → na půdoryse úsečky a získáme půdorys bodu X – přímka XY je další povrchovou přímkou plochy.

Ve vyřešeném příkladu v programu Geogebra je bod Y pohyblivý, proto pokud s ním budeme pohybovat, pak uvidíme všechny možné polohy povrchových přímek plochy přímého parabolického konoidu.

- 3) V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte řez této plochy rovinou α , která je rovnoběžná s rovinou paraboly (yz) a leží mezi rovinou paraboly a rovinou řídicí přímky.

(webové stránky: Přímý parabolický konoid – Příklad 4)



- Opět máte zadány řídicí prvky přímého parabolického konoidu a proto můžete přejít ke konstrukci povrchových přímek.
- Zvolte libovolný bod Y na parabole (volte půdorys Y_1 bodu Y v prostoru paraboly) a veďte jím rovnoběžku s rovinou xz → na půdoryse úsečky a získáte půdorys bodu X – přímka XY je povrchovou přímkou plochy.
- Dále máte zkonstruovat řez rovinou α , která je rovnoběžná s rovinou yz a leží mezi rovinou paraboly a rovinou řídicí přímky. Zvolte bod P tak, aby byly tyto požadavky splněny.
- Rovina α prochází zvoleným bodem P (nárysná stopa n_α → přímka vedená bodem P rovnoběžná s osou z , půdorysná stopa p_α → přímka vedená bodem P rovnoběžná s osou y).
- Tam kde půdorysná stopa roviny α protne půdorys povrchové přímky (X_1Y_1) získáme půdorys R_1 bodu R (bod řezu, který hledáme → leží na povrchové přímce XY).
- Sestrojte povrchové přímky koncovými body paraboly a vrcholem paraboly.

Řezem přímého parabolického konoidu rovinou, která je rovnoběžná s rovinou paraboly, je opět parabola. Budete-li ve vyřešeném příkladu v Geogebře pohybovat bodem Y , pak se budou vykreslovat všechny polohy povrchových přímek. Při pohybování bodem P je vidět, jak se mění tvar řezu (paraboly).

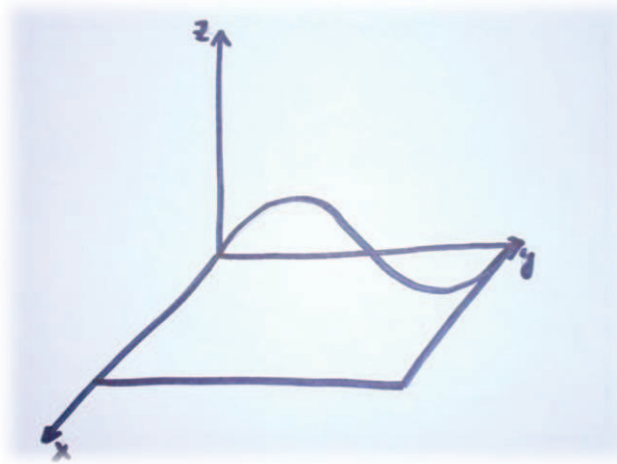
Přímý vlnový konoid



Jakými prvky je určena plocha přímého vlnového konoidu?

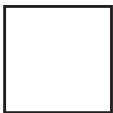
.....

V následujícím obrázku určete řídicí křivku, řídicí přímku a načrtněte povrchové přímky plochy tak, aby byla splněna podmínka, že se jedná o přímý vlnový konoid.

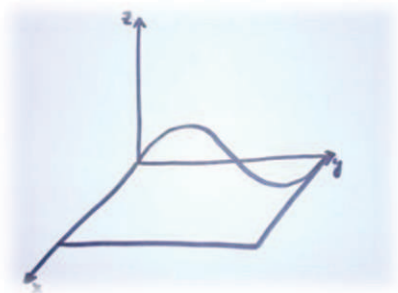


S využitím počítače a internetu nalezněte alespoň dva příklady využití přímého vlnového konoidu.

.....



- 1) Napište obecné parametrické vyjádření přímého vlnového konoidu, je-li řídicí křivka a řídicí přímka umístěna podle následujícího obrázku. (Uvedena pouze jedna perioda sinusoidy, ale předpokládejme, že ji lze neomezeně prodloužit na obě strany stejně tak i řídicí přímku.) Povrchové přímky jsou rovnoběžné s řídicí rovinou xz .



2) Proveďte Kochanského rektifikaci kružnice ležící v rovině yz jejíž střed leží na ose y , prochází-li tato kružnice průsečíkem os y a z , viz následující obrázek. Dále nad rozvinutým obvodem této kružnice narýsujte jednu periodu sinusoidy příslušející k této kružnici.

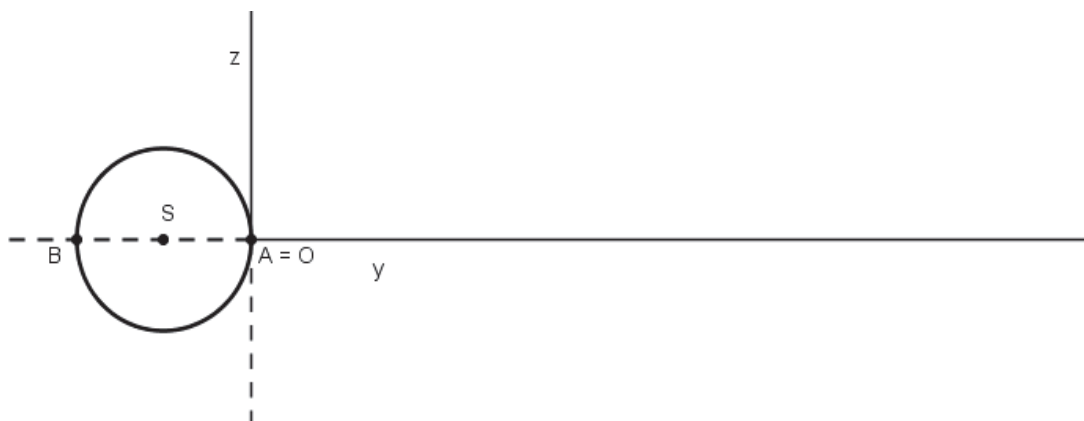
(webové stránky: Přímý vlnový konoid – Příklad 1)

Historická poznámka:

Kochanski (Polsko) patřil k největším myslitelům 17. století. Zabýval se nejrůznějšími obory jako například matematika, fyzika, mechanika atd. Zajímal se také o geometrii konkrétně o výše zmíněnou rektifikaci kružnice.

Rektifikace jinými slovy znamená najít takovou úsečku, aby její délka odpovídala právě délce obvodu kružnice. Touto problematikou se zabývali již antičtí matematici, kteří měli pravděpodobně potřebu geometricky sčítat délky kružnic.

Snažili se o Euklidovské konstrukce (pouze pravítkem a kružítkem) této úsečky. Bohužel až v 19. století bylo dokázáno, že se jedná o neeuklidovsky řešitelnou úlohu. Avšak existuje celá řada způsobů přibližného řešení rektifikace kružnice a jedním z nich je právě Kochanského rektifikace. V tomto příkladu si postup tohoto přibližného řešení ukážeme.



Kochanského rektifikace:

- Bodem S povedeme přímkou b , která svírá s osou y 330° (-30°).
- Průsečík přímky b a osy z je bod M .
- Na polopřímku MA od bodu M nanese na osu z třikrát poloměr zadané kružnice – bod M' .
- Úsečka BM' má délku přibližně π .
- Z bodu A nanese dvakrát získanou vzdálenost π a získáme tak rozvinutý obvod kružnice.

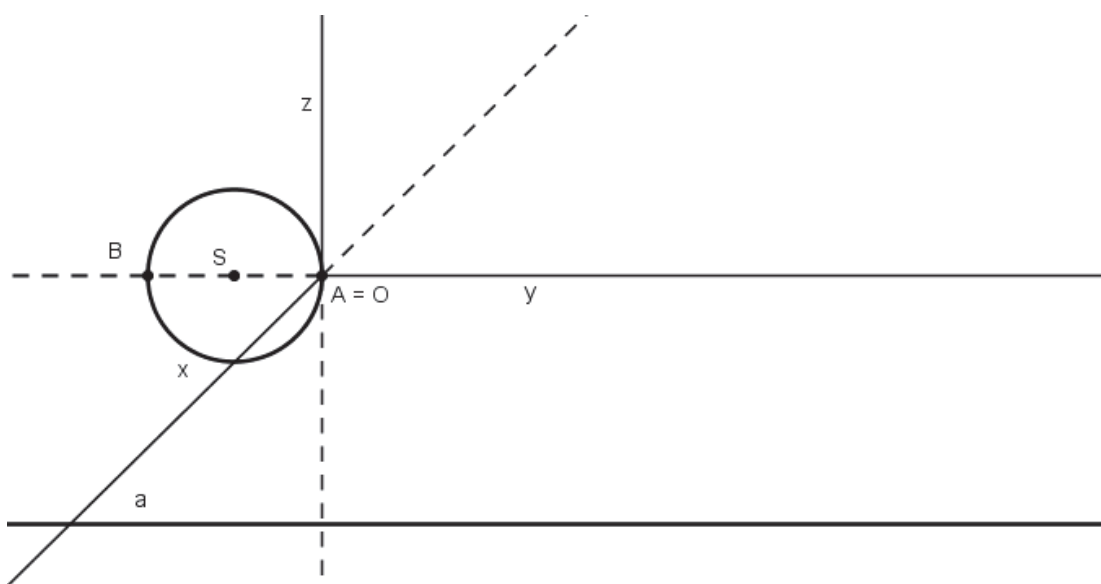
Konstrukce sinusoidy:

Pro konstrukci je výhodné využívat program Geogebra, ve kterém lze vypočítat délku oblouku popřípadě v novějších verzích programu je již přidán ovládací prvek nazvaný délka oblouku. O výpočtu délky oblouku jsme se zmínili již u rotačních ploch, konkrétně u sférického trojúhelníku, proto se odkazujeme na text popřípadě na webové stránky a kapitolu věnovanou rotačním plochám.

- Na kružnici zvolíme bod X_v a zjistíme (vypočítáme) délku oblouku příslušející úhlu ASX_v , a tuto délku nanese od bodu A na rozvinutý obvod kružnice \rightarrow získáme bod X_1
- Bodem X_1 vedeme kolmici na osu y a bodem X_v vedeme rovnoběžku s osou y \rightarrow kde se tyto přímky protnou, získáme bod X (bod ležící na sinusoidě) – vycházíme ze souvislosti funkce sinus a jednotkové kružnice.

Ve vyřešeném příkladu v Geogebře můžeme pohybovat bodem X_v po zadané kružnici a sledovat jak se bod X pohybuje po sinusoidě.

3) V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte plochu přímého vlnového konoidu, který je určen sinusoidou o fázovém posunu $\varphi = \pi$ a řídicí přímkou a . Sinusoidu sestrojte pomocí zadané kružnice. Rovina xz je řídicí rovinou plochy. Přímý vlnový konoid sestrojte pro jednu periodu řídicí křivky.



(webové stránky: Přímý vlnový konoid – Příklad 2)

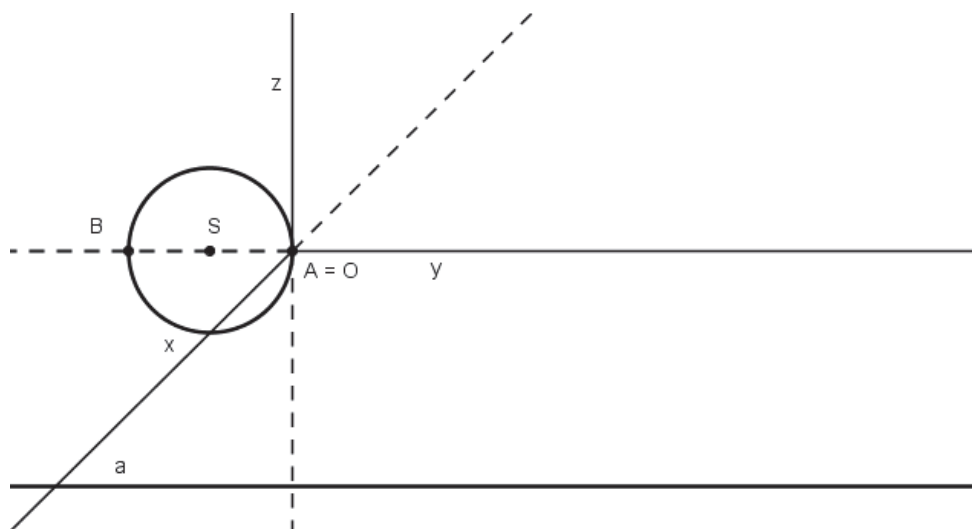
- Bodem S provedeme přímkou b , která svírá s osou y 330° (-30°).
- Průsečík přímky b a osy z je bod M .
- Na polopřímku MA od bodu M nanese na osu z třikrát poloměr zadané kružnice – bod M' .
- Úsečka BM' má délku přibližně π .
- Z bodu A nanese dvakrát získanou vzdálenost π a získáme tak rozvinutý obvod kružnice.
- Na kružnici zvolíme bod X_v a zjistíme (vypočítáme) délku oblouku příslušející úhlu ASX_v , a tuto délku nanese od bodu A na rozvinutý obvod kružnice \rightarrow získáme bod X_1 .
- Aby byl zajištěn fázový posun $\varphi = \pi$, vedeme bodem X_v kolmici na osu y \rightarrow průsečíkem této kolmice se zadanou kružnicí je bod X'_v .
- Bodem X_1 vedeme kolmici na osu y a bodem X'_v vedeme rovnoběžku s osou y \rightarrow kde se tyto přímky protnou, získáme bod X (bod ležící na sinusoidě) – vycházíme ze souvislosti funkce sinus a jednotkové kružnice.
- Povrchové přímky jsou rovnoběžné s rovinou xz , proto vedeme bodem X_1 rovnoběžku s osou x \rightarrow průsečíkem této rovnoběžky s přímkou a je bod Y (přímka vedená body X a Y je jednou z povrchových přímek přímého vlnového konoidu).
- Analogicky sestrojíme povrchové přímky koncovými body sinusoidy a středem sinusoidy (tři polohy povrchových přímek plochy přímého vlnového konoidu).

Ve vyřešeném příkladu v Geogebře můžeme pohybovat bodem X_v po zadané kružnici a sledovat jak se mění polohy povrchových přímek plochy přímého vlnového konoidu.



- 1) V kosoúhlém promítání ($\omega = 135^\circ$, $q_x = \frac{1}{2}$) sestrojte plochu přímého vlnového konoidu, který je určen sinusoidou o amplitudě rovné dvojnásobku poloměru zadané kružnice a řídicí přímkou a . Rovina xz je řídicí rovinou plochy. Přímý vlnový konoid sestrojte pro jednu periodu řídicí křivky. Dále sestrojte řez rovinou α , která je rovnoběžná s rovinou řídicí přímky. Tuto rovinu zvolte mezi rovinou řídicí přímky a rovinou sinusoidy.

(webové stránky: Přímý vlnový konoid – Příklad 3)



- Bodem S vedte přímkou b , která svírá s osou y 330° (-30°).
- Průsečík přímky b a osy z je bod M .
- Na polopřímku MA od bodu M naneste na osu z třikrát poloměr zadané kružnice – bod M' .
- Úsečka BM' má délku přibližně π .
- Z bodu A naneste dvakrát získanou vzdálenost π a získáte tak rozvinutý obvod kružnice.
- Na kružnici zvolte bod X_v , a zjistěte (vypočítejte) délku oblouku příslušující úhlu ASX_v , a tuto délku naneste od bodu A na rozvinutý obvod kružnice → získáte bod X_1 .
- Bodem X_1 vedte kolmici na osu y a bodem X_v , vedte rovnoběžku s osou y – kde se tyto přímky protnou, získáte bod X_{pom} (bod, který leží na sinusoidě má 2x větší vzdálenost než je $|X_1X_{pom}|$ → bod X).
- Povrchové přímky jsou rovnoběžné s rovinou xz , proto vedte bodem X_1 rovnoběžku s osou x → průsečíkem této rovnoběžky s přímkou a je bod Y (přímka vedená body X a Y je jednou z povrchových přímek přímého vlnového konoidu).
- Dále máte sestrojít řez rovinou α , která je rovnoběžná s rovinou yz a leží mezi rovinou sinusoidy a rovinou řídicí přímky – zvolte proto bod P na ose x tak, aby byly tyto požadavky splněny.
- Půdorysná stopa roviny α prochází bodem P rovnoběžně s osou y a nárysná stopa roviny α prochází bodem P rovnoběžně s osou z (protože opět každým bodem půdorysné stopy lze proložit nárysnou stopu a všechny tyto nárysné stopy jsou navzájem rovnoběžné).
- Průsečík půdorysné stopy roviny s půdorysem povrchové přímky p je půdorys bodu R (hledaný bod řezu – leží na povrchové přímce) – konstrukce průsečíku přímky s rovinou.
- Sestrojíme povrchové přímky koncovými body sinusoidy a středem sinusoidy (tři polohy povrchových přímek plochy přímého vlnového konoidu).

Ve vyřešeném příkladu v Geogebře můžeme pohybovat bodem X_v po zadané kružnici a sledovat jak se mění polohy povrchových přímek plochy přímého vlnového konoidu. Navíc lze pohybovat také bodem P a měnit tak polohu roviny řezu. Vidíme, že změnou roviny řezu bude stále řezem přímého vlnového konoidu sinusoida, ale bude se měnit velikost její amplitudy.

2) Které z následujících tvrzení je správně vzhledem k následujícímu obrázku?



- řídící křivka je část přímky ležící v rovině xy a kolmá k rovině yz , povrchové přímky jsou s touto přímkou rovnoběžné
- řídící křivka je část sinusoidy a povrchové přímky jsou kolmé na řídicí přímku, která je rovnoběžná s řídicí rovinou
- řídící křivka je část sinusoidy ležící v rovině xz a řídicí rovinou je rovina yz
- řídící křivka je část přímky rovnoběžná s řídicí rovinou a kolmá na řídicí přímku

PŘÍLOHA D

Obsah přiloženého CD

Text:

- textDP.pdf (elektronická verze textu)

Pracovní listy:

- rotační.zip
- šroubové.zip
- přímkové.zip

Webové stránky:

webovky.zip