

**Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra matematiky**

**Prodlužování dat gradiometrické  
družicové mise GOCE**

**Plzeň 2013**

**Eliška Hamáčková**

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2012/2013

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Eliška HAMÁČKOVÁ**  
Osobní číslo: **A10N0011P**  
Studijní program: **N3602 Geomatika**  
Studijní obor: **Geomatika**  
Název tématu: **Prodlužování dat gradiometrické družicové mise GOCE**  
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Prostudujte doporučenou literaturu. Seznamte se se základy gradiometrie, gradiometrickou družicovou misí GOCE a s principem měření gradiometrických dat na družici GOCE. Zvláštní pozornost věnujte spektrálním a stochastickým vlastnostem měřených gradiometrických dat GOCE.
2. Seznamte se s metodami prodlužování harmonických funkcí. Popište výhody jednotlivých metod. Pozornost věnujte metodám používaným či použitelným pro prodlužování gradiometrických dat. Diskutujte použitelnost metod s ohledem na vlastnosti reálných gradiometrických dat.
3. Ověřte aplikovatelnost vybrané metody v testu prodloužení s použitím syntetických gradiometrických dat. Analyzujte přesnost procesu prodlužování.
4. Použijte tuto metodu pro prodloužení reálných gradiometrických dat GOCE z orbitální dráhy družice na kulovou plochu blízkou povrchu Země ve zvolené testovací oblasti.
5. Proveďte validaci prodloužených gradiometrických dat pomocí dostupného globálního modelu zemského gravitačního pole EGM08.
6. Zhodnoťte dosažené výsledky v kontextu jiných známých metod prodlužování a možných aplikací gradiometrických dat v geodézii a geofyzice.

Rozsah grafických prací: dle potřeby

Rozsah pracovní zprávy: cca 45 stran

Forma zpracování diplomové práce: tištěná

Seznam odborné literatury:

- Gruber T., Rummel R., Abrikosov O., Hees R.: **GOCE Level 2 Product Data Handbook**. The European GOCE Gravity Consortium, 2010.
- Heiskanen W., Moritz H.: **Physical Geodesy**. Freeman and Co., San Francisco, 1967.
- Pail R.: Local gravity field continuation for the purpose of in-orbit calibration of GOCE SGG observations. *Advances in Geosciences* 1: 11-18, 2003.
- Sünkel H. et al.: From Eotvoes to milliGal. ESA/ESTEC Contract No13392/98/GD/NL, 2000.
- Tóth G., Földváry L., Tziavos IN., Ádám J.: Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* 41(1): 21-30, 2006.

Vedoucí diplomové práce: Prof. Ing. Pavel Novák, Ph.D.


Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: 1. října 2012

Termín odevzdání diplomové práce: 29. května 2013

  
Doc. Ing. František Vávra, CSc.  
děkan



  
Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2012

## **Prohlášení**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 29. 5. 2013

.....  
podpis

## **Poděkování**

Na tomto místě bych si přála především co nejvřeleji poděkovat vedoucímu mojí práce Prof. Ing. Pavlu Novákovi, Ph.D. za všechny předané znalosti, rady a připomínky, za trpělivost, kterou se mnou měl, a za čas, který věnoval konzultacím. Dále bych chtěla poděkovat Ing. Josefu Seberovi, Ph.D. za všechny užitečné rady.

Poděkování patří také mému příteli Vojtovi za velkou podporu a za jazykovou korekturu textu práce. Dále jsem vděčná všem mým blízkým za povzbuzování při studiu.

## **Abstrakt**

Tato diplomová práce se zabývá problematikou prodlužování gradiometrických dat družicové gradiometrické mise GOCE. Nejprve jsou uvedeny matematické a fyzikální základy používané pro popis tíhového pole Země v geodézii a přehled metod měření gravitačních dat. Pozornost je věnována především družicovým gravimetrickým misím CHAMP a GRACE a gradiometrické misi GOCE.

Stěžejní část práce se věnuje samotnému prodlužování gradiometrických dat, a to nejprve teoretickému základu a výběru vhodné metody a poté jejímu testování na syntetických datech odvozených z geopotenciálního modelu. Při prodlužování gradiometrických dat směrem dolů dochází k velkému nárůstu měřického šumu, který dosahuje řádově desetkrát vyšších hodnot než samotná data. Další část je tedy věnována testování metod filtrace, kterými je možné hladinu šumu v prodloužených datech snížit. Testované metody byly poté použity na reálná GOCE data. Z výsledku prodlužování bylo patrné, že hladina šumu v reálných datech je nižší, než bylo odhadováno při tvorbě testovacích dat (syntetická data s přidaným šumem). Stále však šum dosahuje relativní hodnoty cca 110 % oproti samotným datům. Metodami filtrace se hladinu relativního šumu v prodloužených reálných datech povedlo snížit na cca 70 %.

## **Klíčová slova**

družicová gradiometrie, filtrace, GOCE, gravitační pole Země, harmonická funkce, Laplaceova diferenciální rovnice, prodlužování dolů, sférická harmonická řada

## **Abstract**

This thesis deals with the continuation of gradiometric data of the gravity-dedicated satellite mission GOCE. Initially, the thesis gives mathematical and physical basics for description of the gravitational field of the Earth as used in geodesy, and lists methods of gravity data measuring. The author focuses on satellite gravimetric missions CHAMP and GRACE and especially on the satellite gradiometric mission GOCE.

The main part of the work addresses issues of the gradiometric data continuation. It states its theoretical basics and explains the selection of the convenient method, and then covers testing of the method using the data synthesized from a global geopotential model. However, the downward continuation of gradiometric data produces great amount of noise, which comes up to more than one order of magnitude higher than the data themselves.

Therefore, the next part of the thesis deals with testing of diverse methods of filtration, which enable to decrease the noise level of the data. The tested methods were applied to the real GOCE data. The results of their continuation showed that the noise level of the real data was lower than expected during a creation of the testing data. Nevertheless, the noise still reached the relative value of approximately 110% compared to the data themselves. By using the methods of filtration, the level of relative noise of the continued real data decreased to the value of approximately 70%.

## **Keywords**

downward continuation, Earth's gravity field, filtration, GOCE, harmonic function, Laplace differential equation, satellite gradiometry, spherical harmonics

# Obsah

<b>1</b>	<b>ÚVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRICKÉ A MATEMATICKÉ ZÁKLADY</b> .....	<b>3</b>
2.1	SOUŘADNICOVÉ SYSTÉMY .....	3
2.2	OPERÁTORY SKALÁRNÍCH A VEKTOROVÝCH POLÍ .....	3
2.3	LAPLACEOVA ROVNICE A HARMONICKÉ FUNKCE .....	5
<b>3</b>	<b>ZÁKLADY POPISU TÍHOVÉHO POLE ZEMĚ V GEODÉZII</b> .....	<b>9</b>
3.1	VELIČINY A VZTAHY POPISUJÍCÍ TÍHOVÉ POLE ZEMĚ .....	9
3.2	JEDNOTKY VELIČIN POPISUJÍCÍCH TÍHOVÉ POLE .....	12
3.3	ROZVOJ GRAVITAČNÍHO POTENCIÁLU DO HARMONICKÝCH ŘAD .....	13
<b>4</b>	<b>METODY MĚŘENÍ TÍHOVÝCH DAT</b> .....	<b>15</b>
4.1	POZEMNÍ GRAVIMETRIE A GRADIOMETRIE .....	15
4.2	LETECKÁ GRAVIMETRIE A GRADIOMETRIE .....	15
4.3	DRUŽICOVÁ GRAVIMETRIE .....	16
4.4	DRUŽICOVÁ ALTIMETRIE .....	19
<b>5</b>	<b>GRADIOMETRICKÁ DRUŽICOVÁ MISE GOCE</b> .....	<b>21</b>
5.1	VYUŽITÍ GRADIOMETRICKÝCH DAT DRUŽICE GOCE.....	24
<b>6</b>	<b>METODY PRODLUŽOVÁNÍ GRADIOMETRICKÝCH DAT A JEJICH TESTOVÁNÍ</b> .....	<b>26</b>
6.1	FORMULACE A ÚČEL ÚLOHY .....	26
6.2	METODY PRODLUŽOVÁNÍ .....	26
6.3	DATA POUŽITÁ PRO TESTOVÁNÍ .....	30
6.4	CHARAKTERISTIKY PŘESNOSTI .....	31
6.5	TEST PRODLUŽOVÁNÍ SYNTETICKÝCH GRADIOMETRICKÝCH DAT .....	32
6.6	NARŮSTÁNÍ CHYB SIGNÁLU BĚHEM PRODLUŽOVÁNÍ DOLŮ .....	36
<b>7</b>	<b>METODY FILTRACE PRODLOUŽENÝCH GRADIOMETRICKÝCH DAT A JEJICH TESTOVÁNÍ</b> .....	<b>40</b>
7.1	FILTRACE POMOCÍ FOURIEROVY TRANSFORMACE .....	40
7.2	FILTRACE DAT PRŮMĚROVÁNÍM .....	48
7.3	POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ JEDNOTLIVÝCH METOD FILTRACE .....	54
<b>8</b>	<b>APLIKACE TESTOVANÝCH METOD NA REÁLNÁ GOCE DATA</b> .....	<b>56</b>
8.1	PRODLUŽOVÁNÍ REÁLNÝCH GOCE DAT .....	56
8.2	FILTRACE PRODLOUŽENÝCH REÁLNÝCH GOCE DAT .....	58
8.3	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ PRÁCE S REÁLNÝMI GOCE DATY .....	63
<b>9</b>	<b>ZÁVĚR</b> .....	<b>65</b>
	<b>POUŽITÁ LITERATURA</b> .....	<b>66</b>
	<b>PŘÍLOHY</b> .....	<b>69</b>



# Seznam obrázků

Obr. 3-1 Gravitační působení tělesa B na okolní body .....	10
Obr. 4-1 Geoidální výšky podle modelu EIGEN-CHAMP05S (v metrech).....	17
Obr. 4-2 Geoidální výšky podle modelu EIGEN-GRACE02S .....	18
Obr. 4-3 Princip družicové altimetre .....	19
Obr. 5-1 Družice GOCE .....	21
Obr. 5-2 Soustava akcelerometrů družice GOCE .....	22
Obr. 5-3 Výkonová spektra šumu jednotlivých proků gradiometrického tenzoru jako funkce času.....	23
Obr. 5-4 Závislost přesnosti dat jednotlivých družicových misí na stupni (řádu) harmonické řady.....	23
Obr. 6-1 Vizualizace gravitačního gradientu $V_{zz}$ (=Vrr) získaného z modelu EGM2008 na povrchu koule nahrazující Zemi s vyznačením oblastí, na kterých bylo testováno prodlužování syntetických dat [E] .....	31
Obr. 6-2 Prodlužování syntetických dat bez šumu nahoru .....	33
Obr. 6-3 Prodlužování syntetických dat zatížených šumem nahoru .....	34
Obr. 6-4 Prodlužování syntetických dat bez šumu dolů .....	35
Obr. 6-5 a) Prodlužování syntetických dat zatížených šumem dolů.....	36
Obr. 6-6 Výsledek prodlužování o 50 km (do výšky 200 km nad Zemí) .....	37
Obr. 6-7 Výsledek prodlužování o 100 km (do výšky 150 km nad Zemí) .....	37
Obr. 6-8 Výsledek prodlužování o 150 km (do výšky 100 km nad Zemí) .....	38
Obr. 6-9 Výsledek prodlužování o 200 km (do výšky 50 km nad Zemí) .....	38
Obr. 6-10 Výsledek prodlužování o 250 km (na povrch Země).....	38
Obr. 6-11 Závislost chyby na vzdálenosti.....	39
Obr. 7-1 Data pro testování filtrace .....	40
Obr. 7-2 Průběh filtrování pomocí FT s propustí odpovídající stupni 170.....	42
Obr. 7-3 Závislost střední a maximální chyby na maximálním propouštěném stupni.....	44
Obr. 7-4 Závislost minimální a maximální hodnoty na maximálním propouštěném stupni .....	44
Obr. 7-5 Ukázky výsledků filtrování pro propust o frekvenci 180, 190 .....	45
Obr. 7-6 Znázornění pásmové propusti .....	46
Obr. 7-7 Gaussova filtrace ve spektru – váhová funkce .....	47
Obr. 7-8 Okolí 5x5 bodů .....	49
Obr. 7-9 Závislost střední a maximální chyby na počtu bodů průměrovaného okolí.....	50
Obr. 7-10 Závislost minimální a maximální hodnoty na počtu bodů průměrovaného okolí.....	50
Obr. 7-11 Výsledky filtrování a odchylky od referenčních hodnot pro průměrování přes 49 bodů.....	51
Obr. 7-12 Váhová funkce nad okolím 7x7 bodů se směrodatnou odchylkou 75' .....	53
Obr. 7-13 Výsledky Gaussovy filtrace pro okolí 49 bodů a směrodatnou odchylku 75' .....	54
Obr. 8-1 Prodlužování 15-ti minutového rastru gradientu $T_{zz}$ reálných dat na oblasti A .....	56
Obr. 8-2 Prodlužování 15-ti minutového rastru reálných dat na oblasti B .....	57
Obr. 8-3 Chyby dolnoproputné filtrace.....	59
Obr. 8-4 Dolnoproputná filtrace s propustí do stupně 210 na reálných GOCE datech .....	60
Obr. 8-5 Chyby dolnoproputné filtrace.....	61
Obr. 8-6 Filtrace průměrováním přes okolí 25 bodů na reálných GOCE datech .....	61
Obr. 8-7 Chyby Gaussovy filtrace průměrováním .....	62
Obr. 8-8 Filtrace Gaussovským průměrováním přes okolí 25 bodů se směrodatnou odchylkou $\sigma = 75'$ na reálných GOCE datech.....	63

## Seznam tabulek

<i>Tab. 6 - 1 Nárůst chyb v závislosti na vzdálenosti, o kterou je prodlužováno .....</i>	<i>39</i>
<i>Tab. 7 - 1 Tabulka výsledků dolnoproustné filtrace.....</i>	<i>43</i>
<i>Tab. 7 - 2 Tabulka výsledků pásmové filtrace (střední chyba [E]).....</i>	<i>46</i>
<i>Tab. 7 - 3 Tabulka výsledků Gaussovy filtrace.....</i>	<i>48</i>
<i>Tab. 7 - 4 Tabulka výsledků průměrové filtrace .....</i>	<i>49</i>
<i>Tab. 7 - 5 Tabulka výsledků váženého průměrování .....</i>	<i>52</i>
<i>Tab. 7 - 6 Tabulka výsledků Gaussovy filtrace (hodnoty střední chyby [E]) .....</i>	<i>53</i>
<i>Tab. 7 - 7 Porovnání metod filtrace .....</i>	<i>54</i>
<i>Tab. 8 - 1 Tabulka výsledků dolnoproustné filtrace.....</i>	<i>58</i>
<i>Tab. 8 - 2 Tabulka výsledků filtrace průměrováním.....</i>	<i>60</i>
<i>Tab. 8 - 3 Výsledky filtrace pomocí Gaussovy filtrace.....</i>	<i>62</i>

# 1 Úvod

Získat co nejpřesnější globální popis gravitačního pole Země je jeden z nejvýznamnějších cílů současné geodézie. Podrobnost, s jakou známe gravitační pole Země přímo souvisí s tím, jak podrobně jsme schopni určit tvar geoidu (hladinové plochy gravitačního potenciálu), který hraje významnou roli například v měření fyzikálních (nadmořských) výšek pomocí GNSS nebo ve sjednocení výškových systémy různých států. Kromě geodézie však gravitační data nacházejí uplatnění v další řadě geovědních oborů, jako je například oceánografie, hydrologie, studium atmosféry nebo geofyzika.

Až do přelomu 20. a 21. století měla gravitační data převážně lokální charakter, jelikož měření probíhalo téměř výhradně pozemními a leteckými metodami. S nástupem prvních družicových gravimetrických misí CHAMP a GRACE byla poprvé k dispozici téměř globální gravimetrická data. Současně se objevila problematika prodlužování dat na vzdálenosti stovek kilometrů. Nejnovější družicovou misí mapující gravitační pole Země je gradiometrická mise GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer). Ta na rozdíl od předchozích dvou družicových misí neměří složky vektoru gravitačního zrychlení, ale měří jejich derivace (gradienty) v kartézském souřadnicovém systému, tedy složky tzv. gradiometrického tenzoru. Družicové mise CHAMP a GRACE dosahovaly nejvyšší přesnosti v měření dlouhodobých dat. Naopak data z pozemní gravimetrie a data družicové altimetrie mají krátkovlnný charakter. Mise GOCE je zaměřena na měření chybějících dat o středních vlnových délkách. Gradiometrická měření umožňují zachytit podrobnější prostorové detaily gravitačního pole, zároveň se u nich však projevuje větší zatížení dat měřickým šumem. Proto je prodlužování složek gradiometrického tenzoru značně problematické.

Prodlužování tíhových dat je standardní operace úspěšně používaná v geodézii při řešení průběhu geoidu. Z velkého počtu publikací jako příklad (Huang, 2002) a (Keller a Hirsch, 1994). Přes jisté problémy se stabilitou řešení je tato operace běžně považována za řešitelnou. Prodlužování družicových gradiometrických dat bylo několikrát diskutováno teoreticky (Tóth a kol., 2006), praktická realizace prodloužení reálných gradiometrických dat je stále předmětem probíhajícího výzkumu.

Pro studium problematiky prodlužování gradiometrických dat je nutné se seznámit s matematickou teorií, především základními operátory skalárních a vektorových polí, Laplaceovou diferenciální rovnicí a harmonickými funkcemi. Tyto základy jsou popsány v začátku práce a navazuje na ně část týkající se základních fyzikálních veličin používaných pro popis gravitačního pole Země. Následuje

přehled používaných metod sběru gravitačních dat, kdy největší pozornost je věnována družicovým misím (především gradiometrické misi GOCE). Důraz je také kladen na spektrální vlastnosti měřených dat a na to, jakým způsobem se data z jednotlivých metod navzájem doplňují. Poté je již pozornost věnována samotnému prodlužování gradiometrických dat, kdy teoretická část je úzce provázána s úvodními kapitolami, pojednávajícími o matematických a fyzikálních základech, a poté následuje testování prodlužování na syntetických datech odvozených z geopotenciálního modelu.

Jelikož prodlužování gradiometrických dat přináší velký nárůst měřického šumu, je dále diskutována možnost zlepšit výsledky dosažené prodlužováním pomocí metod filtrace. Metody filtrace jsou vybírány s ohledem na vlastnosti měřického šumu. Poslední část práce se zabývá aplikací metod prodlužování i následné filtrace na reálná data měřená družicí GOCE. V závěru jsou zhodnoceny výsledky práce a diskutovány možné směry dalšího výzkumu v oblasti prodlužování družicových gradiometrických dat.

## 2 Geometrické a matematické základy

### 2.1 Souřadnicové systémy

Nechť  $\mathbb{E}_3$  je Euklidovský prostor. Definujeme na něm nejprve pravoúhlý kartézský souřadnicový systém. Jeho počátek umístíme do těžiště (hmotného středu) Země. Osa  $x$  směřuje k průsečíku rovníku s Greenwichským poledníkem a osa  $z$  má směr střední polohy rotační osy Země. Osa  $y$  doplňuje soustavu tak, aby byla pravotočivá. Každému bodu tohoto prostoru odpovídá polohový vektor

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z]. \quad (2-1)$$

Dále na stejném prostoru definujeme křivočaré sférické souřadnice. Sférickou šířku označíme  $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  a definujeme ji jako úhel, který svírá průvodič bodu s rovinou zemského rovníku. Sférickou délku označíme  $\lambda \in \langle 0, 2\pi \rangle$  a definujeme ji jako úhel, který svírá rovina Greenwichského poledníku s rovinou místního poledníku. Poslední křivočarou souřadnici nazveme vzdáleností od počátku, označíme  $r \in \langle 0, +\infty \rangle$  a definujeme jako vzdálenost bodu od těžiště Země.

Vztah mezi kartézskými a křivočarými sférickými souřadnicemi je určen geometrickou transformací  $f: \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ , která je vyjádřena transformačními rovnicemi (Drábek a Míka, 1996)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda. \\ z &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (2-2)$$

### 2.2 Operátory skalárních a vektorových polí

Nechť  $\mathbb{E}_3$  je Euklidovský prostor s ortogonální soustavou souřadnic tvořenou počátkem  $\mathbf{o}$  a křivočarou bází  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Označíme  $h_i = \|\mathbf{e}_i\|$  pro  $i = 1, 2, 3$  a  $h = h_1 h_2 h_3$ . Čísla  $h_i$  nazveme Laméovými koeficienty. Dále mějme oblast  $\Omega \subset \mathbb{E}_3$ . Potom  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  nazveme **reálnou funkcí tří reálných proměnných** (nebo také skalárním polem). Pokud je  $f$  diferencovatelná v každém bodě  $\mathbf{x} \in \Omega$ , potom vektorovou funkci (Tomiczek [online])

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \quad (2-3)$$

nazveme **gradient** skalární funkce  $f$  (někdy značíme také jako  $\text{grad } f$ ).

Zobrazení  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{E}_3$ ,  $v = v(v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$  nazveme **vektorovou funkcí tří reálných proměnných** (případně vektorovým polem). Funkce  $v_1, v_2, v_3$  nazveme složkami vektorové funkce  $v$ . Pokud je  $v$  diferencovatelná funkce na  $\Omega$ , definujeme skalární funkci (Tomiczek [online])

$$\text{div } v = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial(h_2 h_3 v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 v_3)}{\partial x_3} \right), \quad (2-4)$$

kteřou nazveme **divergencí** funkce  $v$ .

Dále pro diferencovatelnou funkci  $v$  na  $\Omega$ , definujeme vektorovou funkci (Tomiczek [online])

$$\begin{aligned} \text{rot } v = & \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial(h_3 v_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial x_3} \right) e_1 + \frac{1}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 v_3)}{\partial x_1} \right) e_2 \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 v_1)}{\partial x_2} \right) e_3, \end{aligned} \quad (2-5)$$

kteřou nazveme **rotací** funkce  $v$ . Vztah lze také psát pomocí determinantu (Tomiczek [online])

$$\text{rot } v = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1^2 v_1 & h_2^2 v_2 & h_3^2 v_3 \end{vmatrix}. \quad (2-6)$$

Dále, máme-li skalární funkci  $f$  dvakrát diferencovatelnou na  $\Omega$ , můžeme pro ni pomocí výše definovaných operátorů zavést operátor (Tomiczek [online])

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)), \quad (2-7)$$

kteřý nazveme **Laplaceovým operátorem** a vyjádříme (po zjednodušení) jako

$$\Delta f = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right). \quad (2-8)$$

Výsledek aplikace Laplaceova operátoru na skalární funkci je opět skalární funkce.

Všechny uvedené operátory lze také vyjádřit v obecných (neortogonálních) souřadnicích. Jelikož však kartézské i sférické souřadnice, které jsme pro potřeby této práce definovali výše, jsou ortogonální, nebudeme se tímto zobecněním zabývat. Naopak, uvedeme jistá zjednodušení.

Mějme Euklidovský prostor  $\mathbb{E}_3$  s kartézskou souřadnicovou soustavou, tedy tvořenou počátkem  $o$  a bází  $\{e_i\}_{i=1}^3$  takovou, že  $\|e_i\| = h_i = 1$  pro  $i = 1, 2, 3$ . Dále mějme na  $\Omega \subset \mathbb{E}_3$  definovanou diferencovatelnou reálnou skalární funkci tří reálných proměnných  $f = f(x_1, x_2, x_3)$  a diferencovatelnou reálnou vektorovou funkci tří reálných

proměnných  $v = v(v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$ . Potom můžeme definovat operátory gradient, divergence a rotace následovně (Tomiczek [online])

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right), \quad (2-9)$$

$$\text{div } v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \quad (2-10)$$

$$\text{rot } v = \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right). \quad (2-11)$$

Je-li  $f$  navíc dvakrát diferencovatelná, potom definujeme také Laplaceův operátor jako

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \quad (2-12)$$

Jelikož se Laplaceovým operátorem a s ním spojenou Laplaceovou rovnicí budeme zabývat podrobněji, seznámíme se pro úplnost ještě s tvarem operátoru v křivočarých sférických souřadnicích. Již bez odvození (Drábek, Holubová, 2001):

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\text{tg } \varphi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \quad (2-13)$$

### 2.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce

Homogenní eliptickou parciální diferenciální rovnici ve tvaru (Drábek a Holubová, 2001)

$$\Delta u(x) = 0, \quad (2-14)$$

nazveme Laplaceovou diferenciální rovnicí. Nehomogenní rovnici ve tvaru (Drábek a Holubová, 2001)

$$\Delta u(x) = f(x), \quad (2-15)$$

nazveme Poissonovou diferenciální rovnicí. Funkce  $u$ , které splňují rovnici (2-14), se nazývají **harmonickými funkcemi**.

Laplaceovou rovnicí i harmonickými funkcemi se lze zabývat obecně na prostoru  $\mathbb{R}^N$  (a mnoho tvrzení, která budou uvedena, zůstávají platná v libovolném prostoru  $\mathbb{R}^N$ ). Pro jednoduchost se však omezíme na prostor  $\mathbb{R}^3$  opatřený pro něj standardními kartézskými souřadnicemi, viz část 2.1.

Pokud k parciální diferenciální rovnici (2-14), případně (2-15) doplníme okrajové podmínky, dostaneme tzv. okrajovou úlohu. Rozlišujeme tři typy okrajových podmínek. Máme-li omezenou oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , potom hranici oblasti

označíme  $\partial\Omega$  a derivaci funkce  $u$  ve směru vnější normály  $\partial\Omega$  vyjádříme jako  $\frac{\partial u}{\partial n}$ .  
Potom dle (Drábek a Holubová, 2001):

**Dirichletovou** okrajovou podmínkou nazveme podmínku ve tvaru:

$$u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2-16)$$

**Neumannovou** okrajovou podmínkou nazveme podmínku ve tvaru:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2-17)$$

**Newtonovou** (případně **Robinovou**) okrajovou podmínkou nazveme podmínku ve tvaru:

$$a \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + bu(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (2-18)$$

Zavedeme si ještě značení pro tři speciální typy oblastí. Na libovolném metrickém prostoru  $X$  s metrikou  $d$  (v našem případě půjde o Euklidovskou metriku) můžeme definovat množinu

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, r) = \{y \in X; d(\mathbf{x}, y) < r\}, \quad (2-19)$$

kterou nazveme otevřenou koulí. Dále definujeme množinu

$$\overline{\mathcal{K}}(\mathbf{x}, r) = \{y \in X; d(\mathbf{x}, y) \leq r\}, \quad (2-20)$$

kterou nazveme uzavřenou koulí, a množinu

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}, r) = \{y \in X; d(\mathbf{x}, y) = r\}, \quad (2-21)$$

kterou nazveme sférou.

Mějme nyní úlohu na kulové oblasti  $\Omega = \overline{\mathcal{K}}(\mathbf{o}, R) \subset \mathbb{R}^3$  tvořenou Laplaceovou rovnicí (2-14) a Dirichletovými okrajovými podmínkami (2-16). Pak lze její řešení vyjádřit tzv. třírozměrnou Poissonovou formulí. Poissonova formule vyjadřuje řešení pomocí Greenovy funkce. Tu lze pro mnoho oblastí explicitně vyjádřit. Greenova funkce pro úlohu na kouli má tvar (Drábek, Holubová, 2001)

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\left|\frac{r}{R}\mathbf{x}' - \frac{R}{r}\mathbf{x}\right|} \quad r = |\mathbf{x}|, R = |\mathbf{x}'|.$$

Řešení rovnice s okrajovou podmínkou zadanou na sféře  $\mathcal{S}(\mathbf{o}, R)$  má poté tvar (Drábek, Holubová, 2001)



$$u(\mathbf{x}) = \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{4\pi R} \iint_S \frac{h(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dS. \quad (2-22)$$

Často se používá také tvar po přepisu do sférických souřadnic (Drábek, Holubová, 2001)

$$u(r, \phi, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(\phi', \lambda')}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\psi)^{3/2}} \cos\phi' d\phi' d\lambda', \quad (2-23)$$

kde

$$\cos\psi = \sin\phi \sin\phi' + \cos\phi \cos\phi' \cos(\lambda - \lambda') \quad (2-24)$$

je sférická vzdálenost bodů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$

Dále vyslovíme několik základních matematických vět (všechny čtyři věty podle Drábka a Holubové, 2001) týkajících se harmonických funkcí. Následující tvrzení nejen napomáhají vytvoření intuitivní představy o „chování“ harmonických funkcí, ale také vedou k vyslovení věty o jednoznačné řešitelnosti Dirichletovy okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici.

***Věta o průměru:***

*Průměr hodnot libovolné funkce harmonické v oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  přes jakoukoli sféru  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$  je roven její hodnotě ve středu  $\mathbf{x}$  sféry.*

Přímým důsledkem věty o průměru je následující věta:

***Silný princip maxima:***

*Nechť  $\Omega$  je omezená oblast v  $\mathbb{R}^3$ . Nekonstantní harmonická funkce v  $\Omega$ , spojitá v  $\overline{\Omega}$ , nemůže nabývat svého maxima (minima) uvnitř  $\Omega$ , ale pouze na hranici  $\partial\Omega$ .*

Silný princip maxima nám již umožňuje vyslovit větu o řešitelnosti, ale zmíníme nejprve ještě jedno tvrzení, které naznačuje fyzikální interpretaci pojmu harmonická funkce.

***Dirichletův princip:***

*Nechť  $u(\mathbf{x})$  je harmonická funkce na oblasti  $\Omega$  splňující Dirichletovu okrajovou podmínku*

$$u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2-25)$$

*Pak pro libovolnou funkci  $v(\mathbf{x})$ , která je spojitě diferencovatelná na oblasti  $\overline{\Omega}$  a splňuje tutéž okrajovou podmínku, platí*

$$E(v) \geq E(u), \quad (2-26)$$

*kde  $E$  je potenciální energie.*

Dirichletův princip tedy říká, že vezmeme-li všechny funkce splňující okrajovou podmínku (2-16), potom harmonická funkce z nich bude tou s nejmenší potenciální energií. A jelikož fyzikální systémy mají tendenci setrvávat právě ve stavech s nejmenší energií, popisují nám harmonické funkce právě ony klidové, případně rovnovážné stavy.

***Jednoznačnost řešení Dirichletovy úlohy:***

*Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu (Laplaceovu) úlohu na oblasti  $\Omega$  je určeno jednoznačně.*

**Princip důkazu:**

Budeme-li předpokládat, že existují dvě různá řešení  $u, v$  splňující rovnici, pak ji musí splňovat i jejich rozdíl. Jelikož  $u$  i  $v$  splňují stejnou okrajovou podmínku, musí být jejich rozdíl na celém okraji roven nule, a tudíž díky principu maxima roven nule na celé oblasti. Obě řešení  $u$  a  $v$  jsou tedy totožná.

Pro Dirichletovu okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici lze také ukázat, že její řešení je numericky stabilní vůči vstupním datům. Máme tedy Poissonovou formuli dané řešení úlohy. Dále víme, že řešení je určeno jednoznačně a že je numericky stabilní. Potom (podle Hadamarda, 1902) můžeme říci, že Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kouli je **korektní (well-posed)**.

## 3 Základy popisu tíhového pole Země v geodézii

### 3.1 Veličiny a vztahy popisující tíhové pole Země

Podle Newtonova gravitačního zákona lze gravitační sílu mezi libovolnými dvěma hmotnými body  $x_1$  a  $x_2$  o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  vyjádřit jako (slovně poprvé zformuloval Newton, 1687, dnešní geodetická literatura např. Vaníček a Krakiwsky, 1982, rovnice 6-4)

$$F_g(x_1) = G \frac{m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} (x_1 - x_2) = -F_g(x_2). \quad (3-1)$$

$G$  je Newtonova gravitační konstanta ( $G = 6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ).

Pokud je jako jeden z bodů uvažována Země, lze její hmotnost brát jako pevně danou a získat vztah popisující sílu působící na tělesa v gravitačním poli Země. Gravitační pole Země je potom silovým polem, kde v každém bodě pole působí na hmotný bod síla daná vztahem (Vaníček, Krakiwsky, 1982)

$$F_g(x) = GM \frac{m}{|x - x'|^3} (x - x'). \quad (3-2)$$

$M$  je zde hmotnost Země,  $x'$  bod reprezentující Zemi,  $m$  je hmotnost tělesa reprezentovaného bodem  $x$  nacházejícího se v silovém poli Země.

Místo gravitační síly se často k popisu gravitačního pole používá veličina gravitační zrychlení, vyjadřující zrychlení hmotného bodu padajícího volným pádem v daném gravitačním poli. Vztah gravitační síly a gravitačního zrychlení udává následující rovnice (jedná se vlastně o druhý Newtonův pohybový zákon - Newton, 1687). Pokud se v bodě, kde je gravitační zrychlení  $g$ , nachází těleso o hmotnosti  $m$ , potom na něj působí gravitační síla  $F_g$ :

$$F_g(x) = m g(x). \quad (3-3)$$

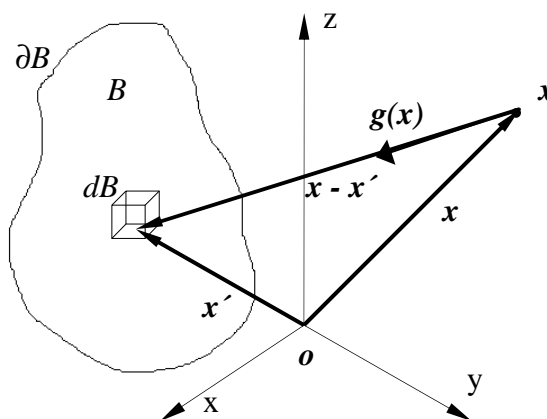
Gravitační zrychlení tedy lze považovat za sílu působící na hmotný bod o jednotkové hmotnosti v silovém poli jiného (gravitujícího) tělesa. Pokud má gravitující těleso hmotnost  $M$ , lze gravitační zrychlení, které udává ostatním tělesům, vypočítat jako

$$g(x) = GM \frac{1}{|x - x'|^3} (x - x'). \quad (3-4)$$

Až doposud jsme tělesa reprezentovali hmotnými body. To je však pro zkoumání gravitačního pole tak velkých těles, jako je například Země, značné zjednodušení. Proto těleso rozdělíme na diferenciálně malé části, viz *obr. 3.1*, a ty pak teprve nahradíme hmotnými body. Uvažujeme navíc, že těleso nemusí být homogenní, tedy měrná hmotnost  $\rho$  jednotlivých částí může být různá a jejich hmotnost je dána součinem jejich měrné hmotnosti a objemu. Gravitační působení

celého tělesa je potom součtem všech jeho částí (dle principu superpozice – Newton, 1687) a jelikož jsou části diferenciálně malé, přechází součet v integrál

$$g(x) = G \iiint_B \frac{\rho(x')}{|x - x'|^3} (x - x') dB(x'). \quad (3-5)$$



Obr. 3-1 Gravitační působení tělesa B na okolní body

V gravitačním poli Země platí při jistém zjednodušení vztah

$$\oint g(x) dx = 0, \quad (3-6)$$

řekneme tedy, že gravitační pole Země je **konzervativní** vektorové pole (Novák [online], 2003). Dále platí, viz rovnice (2-5),

$$\text{rot } g(x) = o, \quad (3-7)$$

tedy jde zároveň o vektorové pole **nevírové**. Uvažujme oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , která splňuje určité požadavky (je plošně jednoduše souvislá nebo hvězdicovitě souvislá), pak jsou tyto dvě vlastnosti vzájemně ekvivalentní a zároveň ekvivalentní tomu, že je dané pole **potenciální** (Hamhalter a Tišer, 2005). (Na ostatních oblastech platí pouze vztahy: potenciální  $\Leftrightarrow$  konzervativní, potenciální (konzervativní)  $\Rightarrow$  nevírové). Díky tomu, že je gravitační pole Země potenciální, lze ho v každém bodě popsat skalární veličinou nazývanou **gravitační potenciál**. Gravitační potenciál označíme  $V$  a vztah mezi ním a gravitačním zrychlením je vyjádřen vztahem, viz rovnice (2-3),

$$g(x) = \nabla V(x). \quad (3-8)$$

Hladinová plocha gravitačního pole Země (neboli ekvipotenciální plocha) se nazývá **geoid**. Pokud Zemi nahradíme referenčním elipsoidem a zemské gravitační pole aproximujeme gravitačním polem generovaným tímto (rotujícím a homogenním) elipsoidem, potom toto pole nazveme normálním tíhovým polem.

Rozdíl mezi skutečným a normálním gravitačním potenciálem se nazývá **poruchový potenciál** a označíme ho  $T$ .

Je-li zkoumáno silové působení na povrchu Země, je třeba kromě gravitační síly  $F_g$  uvažovat také odstředivou sílu  $F_o$ , která vzniká v důsledku rotace Země. Z tohoto důvodu se často pracuje s pojmem tíhová síla, kterou lze (opět díky principu superpozice) získat vektorovým součtem obou výše zmíněných sil

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_g(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_o(\mathbf{x}). \quad (3-9)$$

(Zde je důležité zmínit, že v tomto součtu výrazně převažuje gravitační síla nad odstředivou. Na rovníku tvoří odstředivá síla asi 0,35 % tíhové síly.)

Tíhové zrychlení i tíhový potenciál mají stejně jako tíhová síla složku gravitační i odstředivou. Díky linearitě derivací (a tedy linearitě operátoru gradient) jsou vztahy mezi tíhovým zrychlením a tíhovým potenciálem stejné jako vztahy mezi gravitačním zrychlením a gravitačním potenciálem, případně odstředivým zrychlením a odstředivým potenciálem. S odstředivou a gravitační složkou je tak možné pracovat při odvozování vztahů odděleně.

Odstředivé zrychlení lze vyjádřit jako (Vaníček a Krakiwsky, 1982, rov. 6.7)

$$\mathbf{a}_o(\mathbf{x}) = \omega^2 \mathbf{p}, \quad (3-10)$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotujícího tělesa a  $\mathbf{p}$  je vektor, který má v bodě  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]$  tvar  $\mathbf{p} = [x \ y \ 0]$ . Úhlová rychlost je v případě Země rovna  $7,29115 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ . Na objekty na povrchu Země (a tím i na měřicí přístroje) sice působí obě složky tíhové síly, ale díky tomu, že úhlová rychlost rotace Země je známý údaj, můžeme tíhová data snadno opravit o odstředivou složku a zabývat se pouze složkou gravitační.

Gravitační potenciál lze pomocí rovnic (3-5) a (3-8) vyjádřit jako

$$V(\mathbf{x}) = G \iiint_B \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d B(\mathbf{x}'). \quad (3-11)$$

Jeho Laplacian je vyjádřen součtem (Heiskanen a Moritz, 1967, rov. 2-6)

$$\Delta V(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3. \quad (3-12)$$

To tedy znamená, že v obecném případě je gravitační potenciál řešením Poissonovy diferenciální rovnice. Můžeme však uvažovat speciální případ, kdy se nacházíme vně jakékoli zemské hmoty. Zanedbáme-li atmosféru, můžeme měrnou hmotnost považovat za nulovou, a tudíž je pravá strana rovnice (3-12) rovna nule. Vztah (3-12) se tedy zjednoduší na

$$\Delta V(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}^3 \setminus B. \quad (3-13)$$

Gravitační potenciál  $V$  tedy splňuje vně zemských hmot Laplaceovu diferenciální rovnici, a tedy je zde harmonickou funkcí. To je velkou výhodou, protože Laplaceova rovnice se díky své homogenitě řeší mnohem jednodušeji než Poissonova.

Gravitační potenciál, jakožto skalární veličina, není žádným způsobem měřitelný, můžeme ovšem měřit jeho prostorové změny, tedy jeho první směrové derivace (složky vektoru gravitačního zrychlení  $\mathbf{g}$ ), a dále jeho druhé směrové derivace, které jsou obsaženy v tzv. gradiometrickém (Marussiho) tenzoru, což je tenzor druhého řádu ve tvaru (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \nabla \otimes \nabla V(\mathbf{x}) = \nabla \otimes \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (3-14)$$

Symbol  $\otimes$  značí maticové násobení dvou vektorů.

Díky linearitě a možnosti zaměňovat pořadí derivací je snadné ukázat, že parciální derivace harmonické funkce jsou také harmonickými funkcemi. Tedy, nejen gravitační potenciál, ale také složky vektoru gravitačního zrychlení a složky Marussiho tenzoru jsou harmonické funkce.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B, & \quad i = 1, 2, 3, \\ \Delta \Gamma_{ij}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B, & \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3-15)$$

Měřením složek vektoru gravitačního zrychlení se zabývá gravimetrie. Měřením složek gradiometrického tenzoru se zabývá gradiometrie (někdy též gradientometrie).

K obsahu celé této kapitoly je vhodné z důvodu časových variací zemského tíhového pole doplnit, že všechny uvedené veličiny lze kromě třírozměrného prostoru zkoumat také v rámci prostoročasu. Každá veličina poté bude funkcí prostoru i času  $t$ , např.:

$$\begin{aligned} V &= V(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3-16)$$

My se ale časovým variacím veličin popisujících zemské tíhové pole nebudeme věnovat a omezíme se pouze na jeho stacionární popis.

### 3.2 Jednotky veličin popisujících tíhové pole

Fyzikální rozměry uvedených veličin popisujících tíhové Země podle soustavy jednotek SI (Le Système International d'Unités) jsou následující:

$$F_g \quad [\text{kg m s}^{-2}]$$

$$g \quad [\text{m s}^{-2}]$$

$$V \quad [\text{m}^2 \text{s}^{-2}]$$

$$\Gamma \quad [\text{s}^{-2}].$$

Pro použití v geodézii jsou ale některé z jednotek příliš velké. Proto se pro tíhové zrychlení někdy používá jednotka **Gal** (podle italského renesančního vědce Galilea Galilei), jejíž rozměry jsou (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$\text{Gal} = \text{cm s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2},$$

a někdy také **miliGal**, případně **mikroGal**

$$\text{mGal} = 10^{-3} \text{ Gal} = 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$$

$$\mu\text{Gal} = 10^{-6} \text{ Gal} = 10^{-8} \text{ m s}^{-2}.$$

Pro složky Marussiho tenzoru se ze stejného důvodu používá jednotka **Eötvös** (podle maďarského geofyzika Loránda Eötvöse) o rozměrech (Hofmann-Wellenhof, Moritz, 2005)

$$E = 10^{-9} \text{ Gal cm}^{-1} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}.$$

### 3.3 Rozvoj gravitačního potenciálu do harmonických řad

V kapitole o harmonických funkcích jsme již uvedli jednu metodu řešení Laplaceovy rovnice, a to řešení pomocí Poissonovy formule. Uvedeme si ale ještě jednu metodu, která má široké využití při řešení diferenciálních rovnic, a to nejen Laplaceovy, ale rovnic mnoha typů, včetně evolučních. Především je ale tvar řešení Laplaceovy rovnice Fourierovou metodou velmi významný pro geodézii.

Fourierova metoda pro řešení parciálních diferenciálních rovnic bývá také někdy označována jako **metoda separace proměnných**, což již naznačuje její princip. Řešení parciální diferenciální rovnice s  $N$  proměnnými (prostorovými v případě Laplaceovy a ostatních stacionárních rovnic, obecně se však může vyskytovat i časová proměnná) totiž vyjádříme ve tvaru součinu (někdy se ale používá také tvar součtu)  $N$  funkcí, z nichž každá závisí na jedné z  $N$  proměnných.

Jako příklad si uvedeme Laplaceovu rovnici pro gravitační potenciál. Uvažujeme-li Euklidovský prostor  $\mathbb{E}^3$  opatřený křivočarými sférickými geocentrickými souřadnicemi, splňuje gravitační potenciál rovnici

$$\Delta V(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = [r \ \phi \ \lambda], \quad (3-17)$$

a její řešení budeme hledat ve tvaru (Heiskanen a Moritz, 1967, rovnice 1-42 a 1-48)

$$V(\mathbf{x}) = f(r) g(\phi) h(\lambda), \quad (3-18)$$

kde funkce  $f(r)$  popisuje radiální chování gravitačního potenciálu, zatímco funkce  $g(\varphi)h(\lambda)$  popisuje jeho chování na povrchu geocentrické koule. Nebudeme se zabývat podrobným řešením rovnice, uvedeme pouze konečnou podobu řešení (Heiskanen a Moritz, 1967, rovnice 1-54b)

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{A}_{nm} \cos m\lambda + \bar{B}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \phi). \quad (3-19)$$

$R$  je zde poloměr geocentrické koule nahrazující Zemi. Číslo  $n \in \mathbb{N}$  nazveme **stupněm** a číslo  $m \leq n$  **řádem** řady harmonických funkcí. Čísla  $\bar{A}_{nm}$  a  $\bar{B}_{nm}$  nazveme normovanými Stokesovými koeficienty sférické harmonické řady řádu  $m$  a stupně  $n$ .  $\bar{P}_{nm}$  je normovaná přidružená Legendrova funkce prvního druhu řádu  $m$  a stupně  $n$  (více např. Nádeník, 2000).

Vidíme, že neradiální část část řešení vznikla rozvinutím do řad sférických harmonických funkcí s tzv. Stokesovými koeficienty  $\bar{A}_{nm}$  a  $\bar{B}_{nm}$ . Tyto koeficienty tvoří tzv. geopotenciální modely Země. V současné době nejpodrobnějším modelem je model EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008), který obsahuje koeficienty do stupně 2190 a řádu 2159. Model byl vypočten z měření družicové mise GRACE, pozemního měření tíhového zrychlení a z dat družicové altimetrie (ICGEM - International Center for Global Gravity Field Models, [online]).

Známe-li díky modelu Stokesovy koeficienty, stačí tedy k vypočtení gravitačního potenciálu v jakémkoli bodě  $x$ , který se nachází vně zemských hmot, sečíst řadu (3-19). V tomto případě bude součet omezen maximální dostupnou hodnotou stupně  $n$  resp. řádu  $m$ . Proces výpočtu potenciálu sečtením této řady se nazývá **harmonická syntéza**. Pokud naopak z (nepřímo) měřených hodnot gravitačního potenciálu určíme Stokesovy koeficienty, nazýváme proces **harmonickou analýzou**.

Stupně a řády harmonické řady v rov. (3-19) odpovídají prostorovým frekvencím (případně vlnovým délkám) sinových a kosinových funkcí, jejich součtem je gravitační potenciál vyjádřen. Budou-li v textu zmiňovány nízké frekvence (případně dlouhé vlny), budou tím myšleny složky součtu (3-19) přibližně do stupně 100. Středními frekvencemi (středně dlouhými vlnami) budou označovány složky cca od stupně 100 do stupně 250. Jako vysokofrekvenční (případně krátkovlnné) složky označíme složky stupně vyššího než 250.



## 4 Metody měření tíhových dat

### 4.1 Pozemní gravimetrie a gradiometrie

Pozemní sběr dat, ať už gravimetrických, či gradiometrických, spočívá v měření na konkrétních bodech přímo na povrchu Země (výjimečně také pod povrchem Země, například v důlních prostorech). Nespornou výhodou měření na pevné Zemi je nejvyšší přesnost dat ze všech metod. Případné prodlužování těchto dat na referenční plochu (povrch náhradní koule či referenčního elipsoidu) nahrazující tvar Země se týká pouze velmi krátkých vzdáleností (jednotky km).

Díky možnosti zaměřit polohu bodů tradičními geodetickými metodami mohla být pozemní gravimetrie jako jediná z metod používána i v období před nástupem globálních navigačních družicových systémů (GNSS). Zásadní nevýhodou pozemní gravimetrie je ovšem lokální charakter dat a nemožnost měření na nepřístupných místech (oceány, vysoké hory, pralesy, polární oblasti atd.). Navíc je měřena pouze velikost vektoru tíhového zrychlení. Pozemní data lze měřit absolutními nebo relativními gravimetry. Absolutní gravimetrií lze získat hodnotu tíhového zrychlení přímo z měření na jednom bodě. Při relativním měření se naopak zjišťuje rozdíl tíhového zrychlení mezi bodem se známou hodnotou a bodem s neznámou hodnotou tíhového zrychlení. Z rozdílu se poté určuje neznámá hodnota tíhového zrychlení na novém bodě. Relativní gravimetrie je využívána více a dosahuje operační přesnosti  $\pm 20 \mu\text{Gal}$  (Torge, 1989).

Gradiometrická měření pozemním způsobem se příliš nevyužívají kvůli vysoké citlivosti gradiometrických přístrojů, která přímo souvisí s vysokým rušivým vlivem okolních objektů.

Kromě měření na pevné Zemi lze do pozemní gravimetrie zařadit i gravimetrii námořní, jelikož měření také probíhá na povrchu Země. Jedná se o měření gravimetry umístěnými na lodích, velmi výjimečně v ponorkách. Měření je tedy závislé na GNSS. Přesnost námořní gravimetrie je asi  $\pm 0,1 - 0,5 \text{ mGal}$  (Murray a Tracey, 2001).

### 4.2 Letecká gravimetrie a gradiometrie

Leteckým měřením lze získat gravitační data i z oblastí, které jsou nepřístupné pro měření pozemní. Stále ale tímto způsobem nelze naměřit zcela globální data, jako je možné družicovou gravimetrií. Jelikož naměřené hodnoty by neměly význam bez

jejich přesné lokalizace, je letecká gravimetrie závislá na systémech GNSS. Přesnost měření gravitačních dat leteckou gravimetrií závisí především na řešení dvou dílčích problémů, a to na odlišení gravitačního a negravitačního (kinematického, vzniklého pohybem letadla) zrychlení a na odstranění velkých hodnot šumu v naměřených datech.

Pro letecké mapování gravitačního pole Země existují tři různé koncepty. První a nejstarší z nich je skalární gravimetrie, která měří v každém bodě pouze jednu hodnotu. Podle způsobu měření to může být buď složka vektoru gravitačního zrychlení ve směru lokální tížnice, nebo velikost vektoru gravitačního zrychlení. Druhou metodou je měření všech tří složek vektoru gravitačního zrychlení. Horizontální složky jsou ale měřeny s mnohem menší přesností než složka vertikální. Leteckou gravimetrií se dnes měří s přesností  $\pm 1,5 - 2,0$  mGal pro vlnové délky cca 10 km (více o letecké gravimetrií v Alberts, 2009). Třetí možností je použití letecké gradiometrie. Díky ní je možné měřit všechny složky gradiometrického tenzoru. Letecká gradiometrie se zatím používá ve velmi omezené míře.

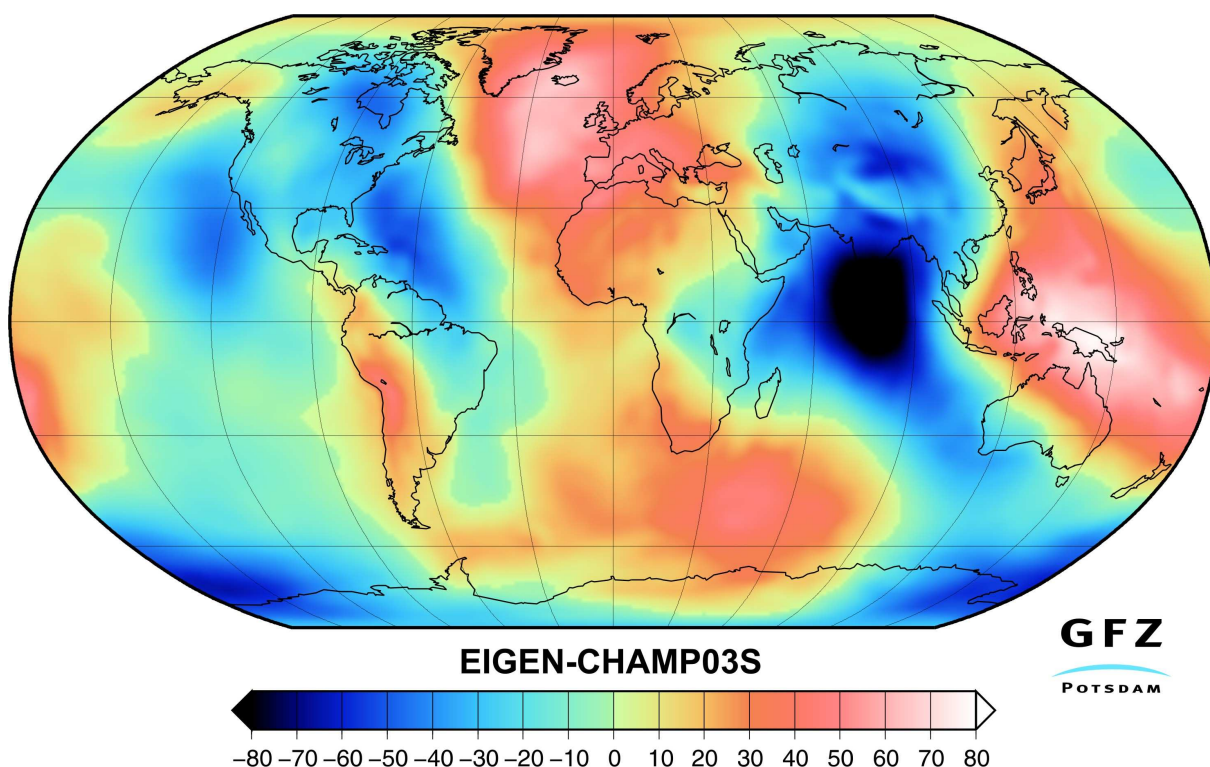
### 4.3 Družicová gravimetrie

Družicová gravimetrie je oproti ostatním metodám schopna poskytnout téměř globální data (s výjimkou polárních oblastí kvůli sklonu orbitální dráhy). Významnými misemi družicové gravimetrie jsou mise CHAMP a GRACE.

Projekt družicové mise **CHAMP** (CHALLENGING Minisatellite Payload) byl realizován německým výzkumným ústavem pro geovědy GFZ (GeoForschungsZentrum, Postupim) a německým institutem DLR (Německé centrum pro letecké a družicové technologie). Družice nesla na palubě kromě mikroakcelerometru také GNSS přijímač, koutové odražeče pro sledování družice pozemskými laserovými dálkoměry, anténu pro bistatickou altimetrii a magnetometr pro studium zemského magnetického pole. Principu gravimetrického měření na družici CHAMP se v angličtině říká **Satellite-to-satellite tracking: high-low** (zkráceně SST-hl). Toto označení vyjadřuje, že družice na nízké dráze (CHAMP) je sledována družicemi na vysoké dráze nad Zemí (GNSS). Princip gravimetrického měření je velmi jednoduchý - družice CHAMP je těleso pohybující se v gravitačním poli Země. Zrychlení tohoto pohybu lze namapovat do Stokesových koeficientů.

Družice CHAMP byla vypuštěna na oběžnou dráhu v červenci roku 2000. Začínala na dráze ve výšce přibližně 450 km nad Zemí a pak vlivem odporu vzduchu postupně klesala. Tím byla limitována její životnost. Celý projekt trval více než deset let, než byl v září 2010 ukončen po sestupu družice do atmosféry. CHAMP byla gravimetrickou družicovou misí, jejíž data umožnila výpočet Stokesových

koeficientů nižších stupňů a řádů (cca do 100) s výrazně vyšší přesností, než s jakou byly koeficienty gravitačního potenciálu nízkých stupňů a řádů do té doby známé z pozemních gravimetrických měření. Bylo vytvořeno několik geopotenciálních modelů Země, jako např. série modelů EIGEN-1 až EIGEN-CHAMP05S (dostupné na ICGEM, [online]). Přesnosti těchto modelů se obvykle liší pro různé frekvence (stupně a řády harmonické řady). Pro model CHAMP03S (Obr. 4-1) je například uváděna přesnost 0,5 mGal v tíhové anomálii nebo 5 cm v geoidální výšce pro polovinu vlnové délky 400 km (což odpovídá stupni a řádu cca 45). Více o misi CHAMP lze dohledat na webových stránkách GFZ Potsdam, CHAMP [online].



Obr. 4-1 Geoidální výšky podle modelu EIGEN-CHAMP05S (v metrech).

(Převzato z [http://www-app2.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index\\_RESULTS.html](http://www-app2.gfz-potsdam.de/pb1/op/champ/results/index_RESULTS.html))

Na projektu **GRACE** (Gravity Recovery And Climate Experiment) se společně podílely NASA (National Aeronautics and Space Administration), GFZ a DLR. GRACE A a GRACE B jsou dvojice identických družic letících za sebou po oběžné dráze ve výšce přibližně 500 km nad zemí v nominální vzdálenosti 220 km. Kromě akcelerometrů a GNSS přijímačů mají na palubě mikrovlnný dálkoměr pro přesné určování změn vzdálenosti mezi oběma družicemi. Změny vzdálenosti lze opět použít pro výpočet Stokesových koeficientů v rozvoji gravitačního potenciálu do řady harmonických funkcí. Tomuto principu měření se v angličtině říká **Satellite-to-satellite tracking: low-low** (zkráceně SST-II). To vyjadřuje, že družice na nízké dráze

(GRACE A) je sledována družicí také na nízké dráze (GRACE B). Zároveň je však využíván i koncept high-low, jelikož družice jsou zároveň sledovány GNSS.

Mise GRACE odstartovala v březnu roku 2002 a přestože životnost družic byla odhadována na 5 let, jsou v době psaní této práce stále na oběžné dráze a poskytují pravidelně data. Nicméně část měřících přístrojů již byla vypnuta z důvodu úspory paliva pro maximální prodloužení mise. NASA již ale plánuje stavbu dvou nových družic GRACE Follow-on, které družice GRACE nahradí. Jejich vypuštění na oběžnou dráhu je plánováno na rok 2017. Mise GRACE ve všech směrech překonala CHAMP. Poskytla doposud nejpřesnější data globálně mapující nižší frekvence zemského geopotenciálu (cca do stupně a řádu 120). Kromě prostorových variací zemského gravitačního podle družice GRACE mapují sezónní variace gravitace. Ze samotných dat naměřených GRACE bylo vytvořeno několik geopotenciálních modelů např. EIGEN-GRACE02S (viz obr. 4-2), GGM02S (opět dostupné na ICGEM, [online]). Modely ze samotných GRACE dat dosáhly maximálního stupně a řádu 180.



Obr. 4-2 Geoidální výšky podle modelu EIGEN-GRACE02S

(Převzato z [http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g002\\_eigen-grace02s.html](http://op.gfz-potsdam.de/grace/results/grav/g002_eigen-grace02s.html))

Nejdůležitějších výsledků ale bylo dosaženo kombinací dlouhovlnných GRACE dat s krátkovlnnými pozemními tíhovými daty a s daty družicové altimetrie. Z této kombinace vzniknul model EGM2008 (Pavlis a kol., 2012, případně ICGEM, [online]), který je prozatím geopotenciálním modelem s nejvyšším prostorovým rozlišením (10 km na povrchu Země) a obsahuje koeficienty až do stupně 2190 a řádu 2160 (do té doby byl nejpodrobnějším modelem model EGM96 do stupně 360). U

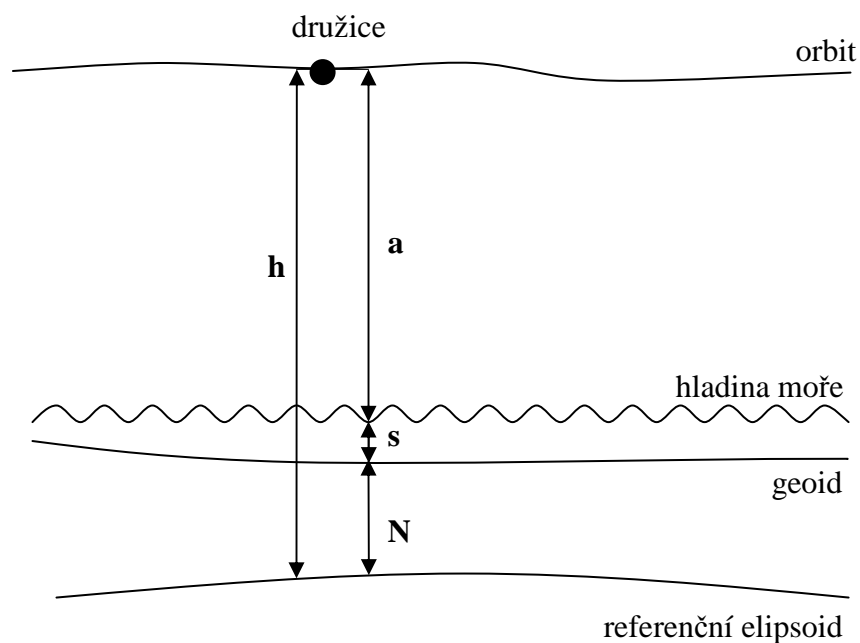
modelu EIGEN-GRACE02S je uváděna přesnost v geoidálních výškách 1 cm pro poloviční vlnovou délku 275 km a 1 mm pro poloviční vlnovou délku 600 km. Více o misi GRACE lze dohledat na webových stránkách The University of Texas at Austin, GRACE, případně v (Reigber a kol, 2004).

#### 4.4 Družicová altimetrie

Družicová altimetrie je metoda, která poskytuje gravitační data nepřímou cestou. Altimetrické družice opatřené GNSS aparaturou pohybující se ve výšce 780 km (ERS) až 1300 km (TOPEX/Poseidon) nad povrchem Země měří svoji výšku nad hladinou moře pomocí radarového výškoměru. Na *obr. 4-3* vidíme jednotlivé známé, měřené i určované veličiny.  $a$  je měřená výška družice nad hladinou moře, kterou měří radarový výškoměr,  $h$  je geodetická (elipsoidální) výška, která je měřena pomocí GNSS přijímače, a  $s$  je časově proměnlivé převýšení mezi geoidem a hladinou moře, které je způsobené například slapy, mořskými proudy, teplotou vody či tlakem atmosféry. Tento parametr je určitelný pomocí geofyzikálních modelů. S jeho znalostí už je poté snadné určit geoidální výšky  $N$  (Novák, 2003):

$$N = h - a - s. \quad (4-1)$$

Známe-li geoidální výšku  $N$ , můžeme z ní určit poruchový potenciál  $T$  a z něj lze určit tíhové zrychlení.



*Obr. 4-3 Princip družicové altimetrie*

Družicová gravimetrie poskytuje globálně dlouhovlnná data a pozemní gravimetrie poskytuje krátkovlnnou složku dat na pevnině. Družicová altimetrie (spolu s málo používanou námořní gravimetrií) tedy doplňuje potřebná krátkovlnná data na oblastech oceánů (prostorové rozlišení tíhových dat odvozených z altimetrických měření je okolo 10 km).

## 5 Gradiometrická družicová mise GOCE

Prozatím jedinou realizovanou družicovou gradiometrickou misí je mise GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer). GOCE je projekt Evropské kosmické agentury (European Space Agency, ESA), který si klade za cíl pomocí stejnojmenné družice (obr. 5-1) podrobně zmapovat globální tíhové pole Země a mimo jiné tak zpřesnit globální model geoidu.

Dráha družice GOCE je velmi nízká, pohybuje se okolo 260 km nad zemským povrchem, a má vysokou hodnotu sklonu své dráhy ( $96,7^\circ$ ). Doba oběhu družice kolem Země je přibližně 1,5 hodiny, denně tedy družice oběhne Zemi přibližně šestnáctkrát. V srpnu 2012 začalo postupné spouštění družice na ještě nižší dráhy (235 km nad zemí), které by měly poskytnout detailnější měření gravitačního pole Země. Družice byla na oběžnou dráhu vypuštěna v dubnu 2009 a konec mise se očekává ke konci roku 2013. Celá mise přijde ESA (a tedy evropské daňové poplatníky) asi na 350 milionů Euro.



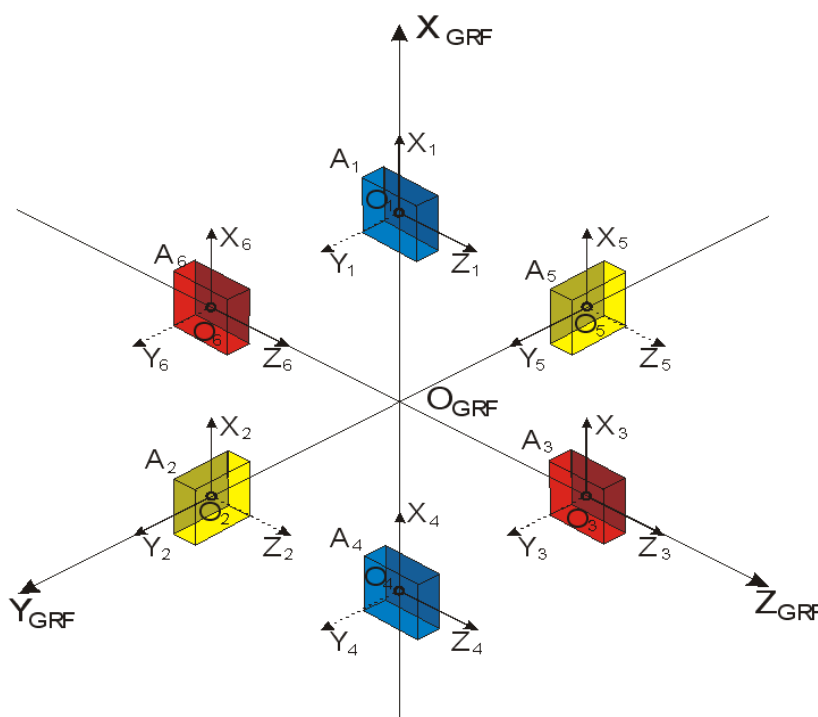
*Obr. 5-1 Družice GOCE*

(Převzato z [http://spaceimages.esa.int/Images/2008/03/Sunny\\_side\\_of\\_GOCE2](http://spaceimages.esa.int/Images/2008/03/Sunny_side_of_GOCE2))

Hlavním měřicím přístrojem na družici GOCE je tříosý elektrostatický gradiometr. Dlouhovlnné složky tíhového pole mohou být určovány z dráhy měřené pomocí GNSS. Jde tedy o kombinaci metod **gradiometrie** a high-low SST. Na družici GOCE jsou dále umístěny koutové odražeče pro laserová měření, která zpřesňují určení její polohy. Družice je vybavena iontovým motorem na xenonové palivo,

pomocí kterého nepřetržitě po celou dobu letu překonává odpor zbytkové atmosféry (a zabraňuje tak jejímu klesání a předčasnému zániku v atmosféře).

Samotný gradiometr na palubě GOCE se skládá ze tří párů akcelerometrů. Tyto akcelerometry měří gravitační gradienty, především jejich složky o nízkých a středních frekvencích. Nízké frekvence ale měří méně přesně než předchozí družicová mise GRACE, proto mají hlavní význam měření středních frekvencí (odpovídající stupňům a řádům v rozsahu cca 100 až 250). Dvojice akcelerometrů se nacházejí na osách kartézského souřadného systému GRF (Gradiometer Reference Frame, tedy Referenční systém gradiometru). Osa X systému GRF má v každém bodě dráhy družice přibližně směr dráhy, osa Z má přibližně radiální směr a osa Y doplňuje soustavu na pravouhlý pravotočivý systém (obr. 5-2). S družicí GOCE je spojeno více referenčních systémů než jen GRF, o dalších se lze dočíst v Gruber a kol., 2010. Dvojice akcelerometrů jsou od sebe vzdáleny asi 50 cm. Diagonální prvky gradiometrického tenzoru (viz rov. 3-14)  $V_{xx}$ ,  $V_{yy}$ ,  $V_{zz}$  a mimodiagonální prvek  $V_{xz}$  jsou měřeny s přesností asi o jeden řád vyšší než zbylé mimodiagonální prvky  $V_{xy}$  a  $V_{yz}$ .



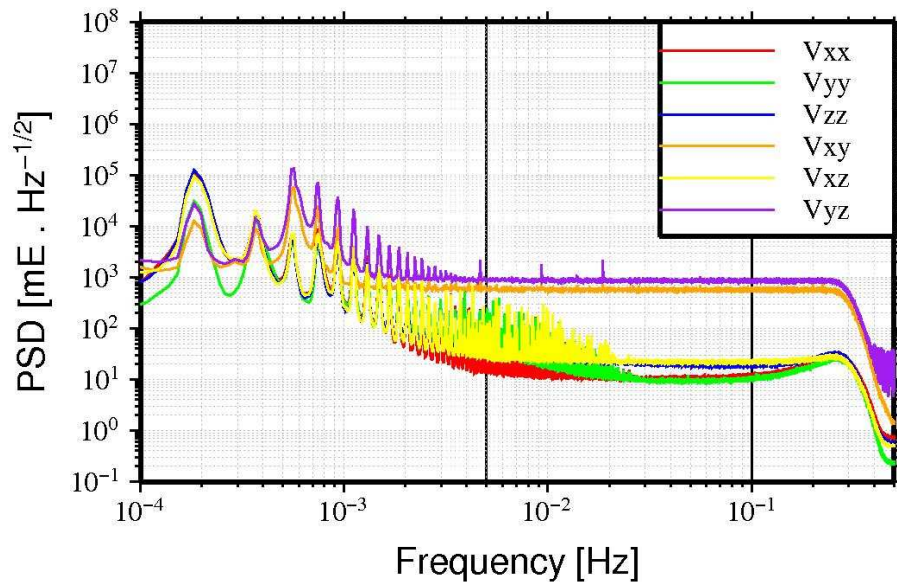
Obr. 5-2 Soustava akcelerometrů družice GOCE

(Převzato z : [http://smc.cnes.fr/lcGOCE/goce\\_accelerometre.png](http://smc.cnes.fr/lcGOCE/goce_accelerometre.png))

Stejně jako u ostatních družicových měření gravitačních dat se přesnost měření gradientů značně mění s časovou (prostorovou) frekvencí. Obrázek 5-3 demonstruje použitelnost gradiometrických měření družicí GOCE v jistém časovém (frekvenčním)

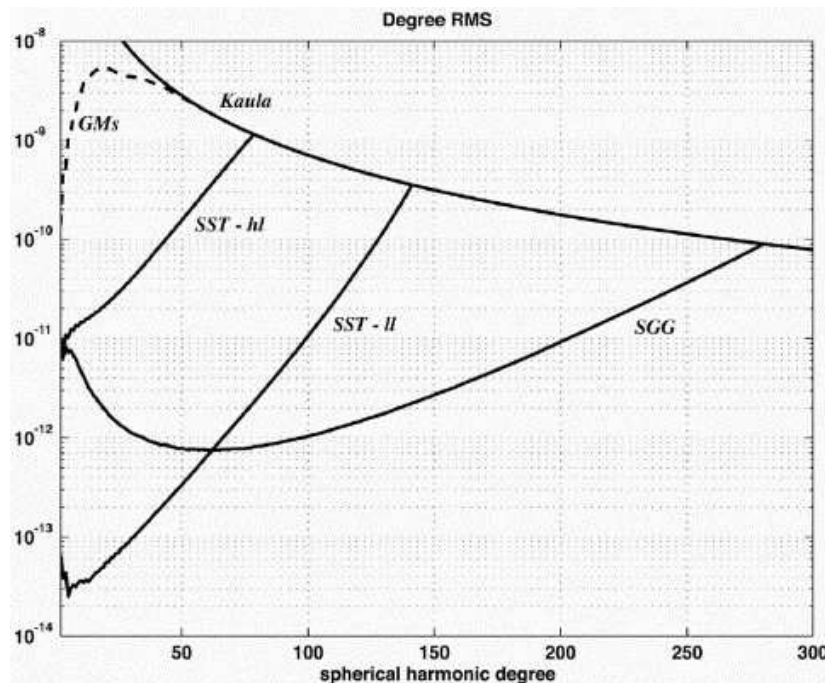


pásmu, který odpovídá naší definici středně dlouhých vln (viz text na konci kapitoly 3).



Obr. 5-3 Výkonová spektra šumu jednotlivých prvků gradiometrického tenzoru jako funkce času (rozdíly oproti modelu TIM\_r1)

(Převzato z: <https://docs.google.com/file/d/0By2RsmhxzXIyeXVZSHJod09DRjg/image?pagenumber=1&w=800>)



Obr. 5-4 Závislost přesnosti dat jednotlivých družicových misí na stupni (řádu) harmonické řady gravitačního potenciálu

(Převzato z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264370701000503>)

Gradiometrická data měřená družicí GOCE překonávají přesností data předchozích misí přibližně v rozmezí stupně a řádu 70 až 280, jak je vidět na *obr. 5-4*. Graf znázorňuje střední chyby (RMS) jednotlivých metod měření gravitačních dat. Vidíme, že data družice CHAMP (SST - hl) ve své době překonala přesnost dosavadních geopotenciálních modelů (GMs). Následující mise GRACE (SST - ll) přesností měřených gravitačních dat překonala data z mise CHAMP. Mise GRACE je doposud nejpresnějším zdrojem dlouhodobých dat, zatímco v oblasti středně dlouhých vln byla překonána misí GOCE (SGG). Při tvorbě nových modelů gravitačního pole Země se proto dnes využívá kombinace GRACE a GOCE dat.

## 5.1 Využití gradiometrických dat družice GOCE

Plánovaných využití dat mise GOCE je mnoho. Mise má zpřesnit klimatologické modely, především z hlediska vlivu gravitace na oceánské cirkulace a hladiny moří. V tomto směru již například mise GOCE rozřešila dlouholetý spor o změny mořské hladiny podél východního pobřeží Severní Ameriky. Zatímco se geodeti domnívali, že hladina moře s přibývajícím zeměpisnou šířkou stoupá, oceánografové byli opačného názoru. Díky družicovým měřením byla potvrzena druhá z hypotéz, tedy že mořská hladina od Floridy ke Kanadě klesá. Data mise mají také napomoci hlubšímu poznání vnitřních vrstev Země, například rozmístění lávy pod sopkami. To by mělo vést k lepšímu porozumění pohybům tektonických desek a seismickým pohybům obecně. V oblasti seismologie bylo zajímavým jevem zachycení signálu po zemětřesení v Japonsku. Vědci zjistili, že po tom, co bylo Japonsko zasaženo v březnu 2011 silným zemětřesením, zachytily akcelerometry družice GOCE vertikální posuny atmosféry a změny v hustotě vzduchu v podobě ultrazvukových vln. Ty vyvolalo chvění povrchu Země při zemětřesení.

Mezi zemskou kůrou a svrchním zemským pláštěm se nachází vrstva nazývaná Mohorovičičova diskontinuita (zkráceně také jen Moho). Ta je významná například tím, že v ní vlivem skokového rozdílu měrné hmotnosti dochází ke zrychlení seismických vln. Tato vrstva není přesně sférická, je různě zprohýbaná a doposud byl její průběh určován pouze lokálně z gravimetrických a seismografických měření. Nyní byla na základě gradiometrických dat z GOCE vytvořena nová globální mapa vrstvy Moho. Díky velmi blízkému vztahu mezi výškovým systémem a zemským tíhovým polem může lepší znalost tíhového pole napomoci k vytvoření univerzálního celosvětového výškového systému a sjednocení referenční výškové hladiny. Dále by gradiometrická data měla sloužit k lepším odhadům tloušťky polárních ledových příkrovů, které jsou klimatologové považovány za ukazatele klimatických změn.

STSE (Support To Science Element) je program Evropské kosmické agentury, který podporuje vědecké využití dat z misí této agentury. Jeden ze současných projektů STSE, týkající se zpracování dat z družice GOCE, nese název „GOCE-GDC: Towards a better understanding of the Earth's interior and geophysical exploration research“. Tento projekt se zabývá kombinací gravitačních gradientů GOCE s gravitačními měřeními družice GRACE a poté jejich prodloužením na povrch Země. Prodloužené gradienty mají být kombinovány s pozemními tíhovými daty a s daty družicové altimetrie. Výsledné gravitační gradienty mají být geofyzikálně interpretovány. Do tohoto projektu je zapojeno šest evropských univerzit, které koordinuje Západočeská univerzita v Plzni, konkrétně členové Katedry matematiky. Jejich podíl na projektu by se měl týkat především prodlužování gradientů a jejich kombinace s daty z pozemních tíhových a družicových altimetrických měření (více na webových stránkách projektu Towards a better understanding of the Earth's interior and geophysical exploration research, [online]).

Mnoho článků o využití GOCE dat lze najít na internetových stránkách ESA, případně v (Sünkel a kol., 2000).

## 6 Metody prodlužování gradiometrických dat a jejich testování

### 6.1 Formulace a účel úlohy

Prodlužování gradiometrických (případně obecně gravitačních) dat lze chápat jako výpočet hodnot gravitačních dat na určité referenční ploše z dat na jiné referenční ploše. Vzhledem ke tvaru Země a geometrii orbitálních drah družic se obvykle jedná o dvě geocentrické sféry o různých poloměrech, nicméně pro data na dostatečně malém území lze použít i planární aproximaci.

Mějme v třírozměrném Euklidovském prostoru  $\mathbb{E}_3$  sféru  $S(o, R)$  a bod  $x = (r, \phi, \lambda)$ . Dále mějme na tomtéž prostoru funkci  $u$ . Potom proces výpočtu neznámých hodnot  $u(x)$  z hodnot  $u(x')$ , kde  $x' \in S$ , se pro  $r > R$  nazývá **prodlužování nahoru**. Pro  $r < R$  se tato úloha nazývá **prodlužování dolů**.

Prodlužování využíváme, pokud máme data naměřena jinde (obvykle v jiné výšce), než kde nás zajímají. Například je výhodné měřit gravitační data družicemi, protože poskytují téměř globální pokrytí. Družice ovšem poskytují data ve výšce jejich oběžné dráhy, zatímco většina geodetických i jiných aplikací gravitačních dat upřednostňuje, aby byly jejich hodnoty známy na povrchu Země, případně na povrchu koule či elipsoidu, který ji nahrazuje. Proto je třeba naměřená data pro řadu aplikací prodloužit dolů.

Prodlužování nahoru se používá například k prodloužení pozemních dat do výšky oběžné dráhy družice pro jejich porovnání s daty měřenými družicemi (Pail, 2003).

### 6.2 Metody prodlužování

Je mnoho způsobů, jak přistupovat k problematice prodlužování gravitačních, resp. gradiometrických dat. Například máme-li na oblasti  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  reálnou funkci  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , která má na okolí  $U(x') \subset \Omega$  totální diferenciál  $df$  řádu  $k + 1$ , potom podle Taylorovy věty pro každé  $x \in U(x')$  existuje  $\theta \in (0, 1)$  tak, že lze psát (Drábek a Míka, 1996).

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}') + \frac{1}{1!} df(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}') + \dots \\
&+ \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{x}', \mathbf{x} - \mathbf{x}') + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{x}' + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{\text{zbytek řádu } k+1}.
\end{aligned} \tag{6-1}$$

Vzorec nám tedy dává vztah pro výpočet hodnoty funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{x}$  z hodnoty a derivací v bodě  $\mathbf{x}'$ . Tento vztah lze použít pro prodlužování dat, ale pouze na velmi malé vzdálenosti (do řádů km), protože se vzdáleností bodů  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$  velmi rychle narůstá chyba aproximace. Dalším problémem je důkaz platnosti rov. (6-1) na měřená data, resp. konvergence řady na pravé straně rovnice. Pro prodlužování gradiometrických dat z dráhy družice na povrch Země se tedy tato metoda nehodí.

Dále lze pro prodlužování použít metody kolokace nebo provést na datech ve výšce dráhy družice harmonickou analýzu a s vypočtenými Stokesovými koeficienty poté provést harmonickou syntézu na kouli nahrazující povrch Země. Nejpoužívanějším konceptem je uvažovat Laplaceovu diferenciální rovnici pro gravitační potenciál (3-13), případně některou z jeho derivací, a data na sféře, po které se přibližně pohybuje družice, brát jako okrajovou podmínku pro tuto rovnici. Tuto úlohu lze poté řešit například již zmíněnou Poissonovou formulí (2-22) nebo Fourierovou metodou, viz rov. (3-19).

## 6.2.2 Prodlužování pomocí Poissonovy formule

V kapitole 2.3, věnující se Laplaceově rovnici a harmonickým funkcím, byla uvedena Poissonova formule pro řešení Laplaceovy rovnice s Dirichletovými okrajovými podmínkami na kouli. Tvar rov. (2-21) (případně (2-20) pro kartézské souřadnice) slouží k výpočtu hodnot harmonické funkce uvnitř koule z hodnot na jejím povrchu. Nicméně je známo, že zemský gravitační potenciál lze považovat za harmonickou funkci pouze vně zemských hmot, tedy nikoli uvnitř celé koule, ať už uvažujeme jakoukoli kouli se středem v počátku geocentrické souřadné soustavy.

Okrajovou úlohu pro Laplaceovu rovnici s okrajovou podmínkou na sféře lze ovšem zadat ještě jiným způsobem. Uvažujme sféru  $S(\mathbf{o}, R) \subset \mathbb{E}_3$  ohraničující kulovou oblast  $\Omega = \mathcal{K}(\mathbf{o}, R) \subset \mathbb{E}_3$  nahrazující Zemi. Okrajová úloha bude mít podobu

$$\begin{aligned}
\Delta u(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega} &= \mathbb{E}_3 \setminus \Omega, \\
u(\mathbf{x}) &= h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\overline{\Omega}, \\
u(\mathbf{x}) &\rightarrow 0, & \|\mathbf{x}\| &\rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{6-2}$$

Úlohu tedy řešíme vně koule, na jejímž povrchu je zadána okrajová podmínka. Poslední podmínka je v okrajové úloze nová a vyjadřuje tzv. regularitu v nekonečnu,

kteřou vyžadujeme od chování funkce  $u$  (kteřá může představovat gravitační potenciál nebo některou z jeho směrových derivací).

Řešení této úlohy lze stále vyjádřit Poissonovou formulí, pouze s drobnou znaménkovou úpravou

$$u(r, \phi, \lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{h(\phi', \lambda')}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \psi)^{3/2}} \cos(\phi') d\phi' d\lambda'. \quad (6-3)$$

Poissonova formule tedy dává vztah pro prodlužování nahoru a z kapitoly 2 již víme, že tato úloha je korektní. Vztah lze použít pro prodlužování libovolných harmonických funkcí, je tedy stejný pro prodlužování gravitačního potenciálu i jeho derivací.

V praxi by tato úloha byla vždy řešena v diskretizovaném tvaru, tj. integrál by byl nahrazen sumací. Zároveň chceme často spočítat prodloužené hodnoty funkce nejen v jednom bodě, ale na určité oblasti. Častým případem je oblast bodů na sféře. Potom si můžeme vektor známých hodnot na sféře o poloměru  $R$  označit jako  $\mathbf{u}_R$  a vektor neznámých hodnot na sféře o poloměru  $r$  označíme  $\mathbf{u}_r$ . Celou formuli je poté možno zapsat v diskretizovaném maticovém tvaru.

$$\mathbf{u}_R = A\mathbf{u}_r \quad \text{pro} \quad R > r. \quad (6-4)$$

V případě, že se shoduje výpočtení a integrační oblast, tedy matice  $A$  je čtvercová, potom lze rovnici invertovat (ve smyslu maticové inverze), a získat tak vzorec pro prodlužování nahoru

$$\mathbf{u}_r = A^{-1}\mathbf{u}_R \quad \text{pro} \quad R > r. \quad (6-5)$$

Zde je nutné si uvědomit, že rov. (6-5) již nepopisuje řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici, a proto již tato úloha nemusí být korektní. Z dalších částí textu budou patrné především potíže s numerickou stabilitou rovnice vůči vstupním datům.

### 6.2.3 Prodlužování ve spektrálním tvaru

V kapitole 3.3 byl stručně nastíněn princip Fourierovy metody řešení diferenciálních rovnic, pomocí níž můžeme gravitační potenciál rozvinout do řady harmonických funkcí. Neznáme-li Stokesovy koeficienty, součet řady harmonických funkcí je vlastně **obecným** řešením Laplaceovy rovnice obsahujícím volitelné konstanty.

Pokud je Laplaceova rovnice řešena Fourierovou metodou, ale jsou navíc uvažovány Dirichletovy okrajové podmínky, lze získat vztah pro prodlužování gravitačního potenciálu (Heiskanen, Moritz, 1967, rov. 1-89)

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{1}{|S|} \iint_S K(r, \phi, \lambda, R, \phi', \lambda') V(R, \phi', \lambda') dS(R, \phi', \lambda'). \quad (6-6)$$

Jednotlivé veličiny v rov. (6-6) mají následující vyjádření a význam:

$$K(r, \phi, \lambda, R, \phi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \text{ - integrační jádro} \quad (6-7)$$

$$\cos \psi = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda - \lambda') \quad \text{- sférická vzdálenost } \mathbf{x} \text{ a } \mathbf{x}' \quad (6-8)$$

$$|S| = 4\pi R^2 \quad \text{- povrch integrační koule} \quad (6-9)$$

$$dS(R, \phi', \lambda') = R^2 \cos(\phi') d\phi' d\lambda' \quad \text{- diferenciál funkce sfér. plochy } S \quad (6-10)$$

V případě prodlužování nahoru platí  $r > R$  ( $R$  je poloměr sféry, na které hodnoty známe,  $r$  je poloměr sféry, na které hodnoty počítáme) a člen  $\frac{R}{r} < 1$  se nazývá **útlumový faktor**. Řadu tvořící integrační jádro poté lze sečíst. Její součet je roven (Hofmann-Wellenhof a Moritz, 2005)

$$K(r, \phi, \lambda, R, \phi', \lambda') = \frac{R(r^2 - R^2)}{l^3}, \quad (6-11)$$

kde  $l$  je prostorová vzdálenost mezi body  $x$  a  $x'$ . Pro prodlužování dolů je  $\frac{R}{r} > 1$ , a proto se v tomto případě stejný člen nazývá **amplifikační faktor**. Součet řady by v tomto případě byl divergentní, proto je potřeba omezit počet sčítaných členů. Jelikož jednotlivé členy řady odpovídají složkám potenciálu o různých frekvencích, záleží omezení především na spektrálních vlastnostech konkrétních měřených dat a nelze obecně určit optimální hodnotu. Po úpravě omezující počet sčítaných členů lze rov. (6-5) použít pro prodlužování nahoru.

Pro prodlužování složek Marussiho tenzoru (gravitačních gradientů) platí obdobný vztah, pouze s drobnou změnou integračního jádra (Tóth a kol., 2006)

$$\Gamma_{ij}(r, \phi, \lambda) = \frac{1}{|S|} \iint_S K(r, \phi, \lambda, R, \phi', \lambda') \Gamma_{ij}(R, \phi', \lambda') dS(R, \phi', \lambda'). \quad (6-12)$$

$$K(r, \phi, \lambda, R, \phi', \lambda') = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+3} P_n(\cos \psi) \text{ - integrační jádro} \quad (6-13)$$

Empiricky však bylo ověřeno, že vztah platí přesně pouze pro složku  $\Gamma_{rr}$ . Další složky dosahují při simulacích pomocí syntetických dat asi o řád nižší přesnosti. Tato nepřesnost je ale zanedbatelná vzhledem k nárůstu měřického šumu při prodlužování reálných gradiometrických dat zatížených šumem.

V předchozí části byl popsán proces prodlužování z hlediska matematické teorie. V několika následujících částech bude ilustrováno, v čem se praktické výpočty liší od teoretických modelů a jaké problémy při zpracování dat nastávají.

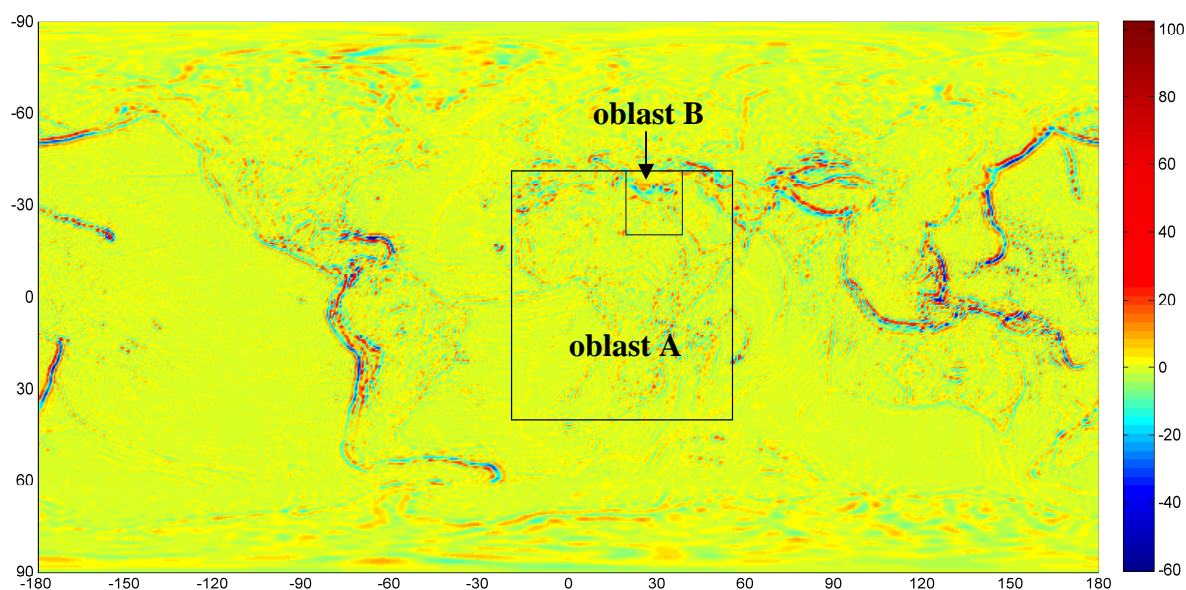
### 6.3 Data použitá pro testování

Pro práci byla dostupná i používána skutečná data z družic GOCE po určitém předzpracování. Výška družice nad Zemí není v čase zcela konstantní, což je pro výpočty nevýhodné, navíc jsou data měřena v nepravidelně rozmístěných bodech. Pro tuto práci byla data již poskytnuta po prodloužení na geocentrickou sféru o poloměru aproximujícím dráhu družice o výšce 250 km nad Zemí a v pravidelném rastru sférických souřadnic. U skutečných dat však není přesně známé množství ani podoba šumu v měřených datech, a proto se nedá přesně zkoumat jeho narůstání během prodlužování dolů.

Proto se pro testování různých metod prodlužování gradiometrických dat používají simulovaná data vypočtená harmonickou syntézou pomocí rov. (3-19) z globálních geopotenciálních modelů. Zde byla použita data z modelu EGM2008 (ICGEM, [online]). Pokud bylo třeba simulovat šum v reálných datech, byl do gradiometrických dat z EGM2008 přidán bílý Gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou 0,01 E, což je hodnota, kterou by skutečný šum reálných gradiometrických dat neměl přesáhnout, naopak je pravděpodobně mírně nadsazená.

Prodlužování dat je výpočetně poměrně náročný proces, proto není vhodné testovat jednotlivé metody pro celý povrch Země. Místo toho byly vybrány dvě menší geografické oblasti. Oblast A obsahuje celý africký kontinent, konkrétně v rozmezí  $\varphi = [-35^\circ, 40^\circ]$ ,  $\lambda = [-20^\circ, 55^\circ]$ . Oblast B je výřezem z oblasti A v rozmezí  $\varphi = [20^\circ, 40^\circ]$ ,  $\lambda = [20^\circ, 40^\circ]$ , na které dochází k velkým změnám gravitačních gradientů na rozhraní dvou zemských desek v oblasti Středomoří.





Obr. 6-1 Vizualizace gravitačního gradientu  $V_{zz}$  ( $=V_{rr}$ ) získaného z modelu EGM2008 na povrchu koule nahrazující Zemi s vyznačením oblastí, na kterých bylo testováno prodlužování syntetických dat [E]

Jak pro testovací, tak pro reálná GOCE data bude prodlužování prováděno vždy na složce  $V_{zz} = V_{rr}$ , případně  $T_{zz} = T_{rr}$ .

## 6.4 Charakteristiky přesnosti

Při posuzování přesnosti výpočtu považujeme syntetická data z modelu za přesná data a naměřená (případně vypočtená) data se od nich vždy nějakou měrou liší. Je třeba si stanovit určitou metriku, která bude určovat, jak jsou vypočtená data „vzdálena“ od referenčních dat. Máme vektor naměřených (vypočtených) dat  $\mathbf{x}$  o  $N$  prvcích a vektor referenčních dat  $\hat{\mathbf{x}}$  také o  $N$  prvcích. Zvolíme si tedy na prostoru  $\mathbb{R}^N$  metriku definovanou jako

$$s = d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}. \quad (6-14)$$

Tuto metriku nazveme **střední chybou** a označíme  $s$ .

Pozn.: Obvyklejší je značit střední chybu řeckým písmenem  $\sigma$ . To si ale v této práci potřebujeme vyhradit pro značení rozptylu  $\sigma^2$ , který bude použit například u filtrování dat pomocí Gaussovy funkce (kapitoly 7.1.3 a 7.2.3).

Abychom neměli pouze jednu charakteristiku přesnosti, zavedeme si ještě na prostoru  $\mathbb{R}^N$  metriku odvozenou z tzv. maximové normy (někdy se označuje jako **Čebyševova metrika**). Ta má tvar

$$MAX = d(x, \hat{x}) = \max_{i \in \langle 1, N \rangle} \{x_i - \hat{x}_i\}. \quad (6-15)$$

Obě uvedené metriky vyjadřují absolutní velikost odchylky vypočtených dat oproti syntetickým datům z modelu. V některých případech je ale vhodné posuzovat výsledek také podle relativní chyby, tedy podle toho, jak velká je chyba oproti datům. Zavedeme si tedy ještě bezrozměrnou **relativní chybu**:

$$\delta = \frac{s}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^2}{N}}} \cdot 100 \quad [\%]. \quad (6-16)$$

Jde tedy o střední chybu (kvadratický průměr odchylek v jednotlivých bodech) normovanou kvadratickým průměrem referenčních dat v jednotlivých bodech. Relativní chybu kromě procentuálního vyjádření také zapsat desetinným číslem.

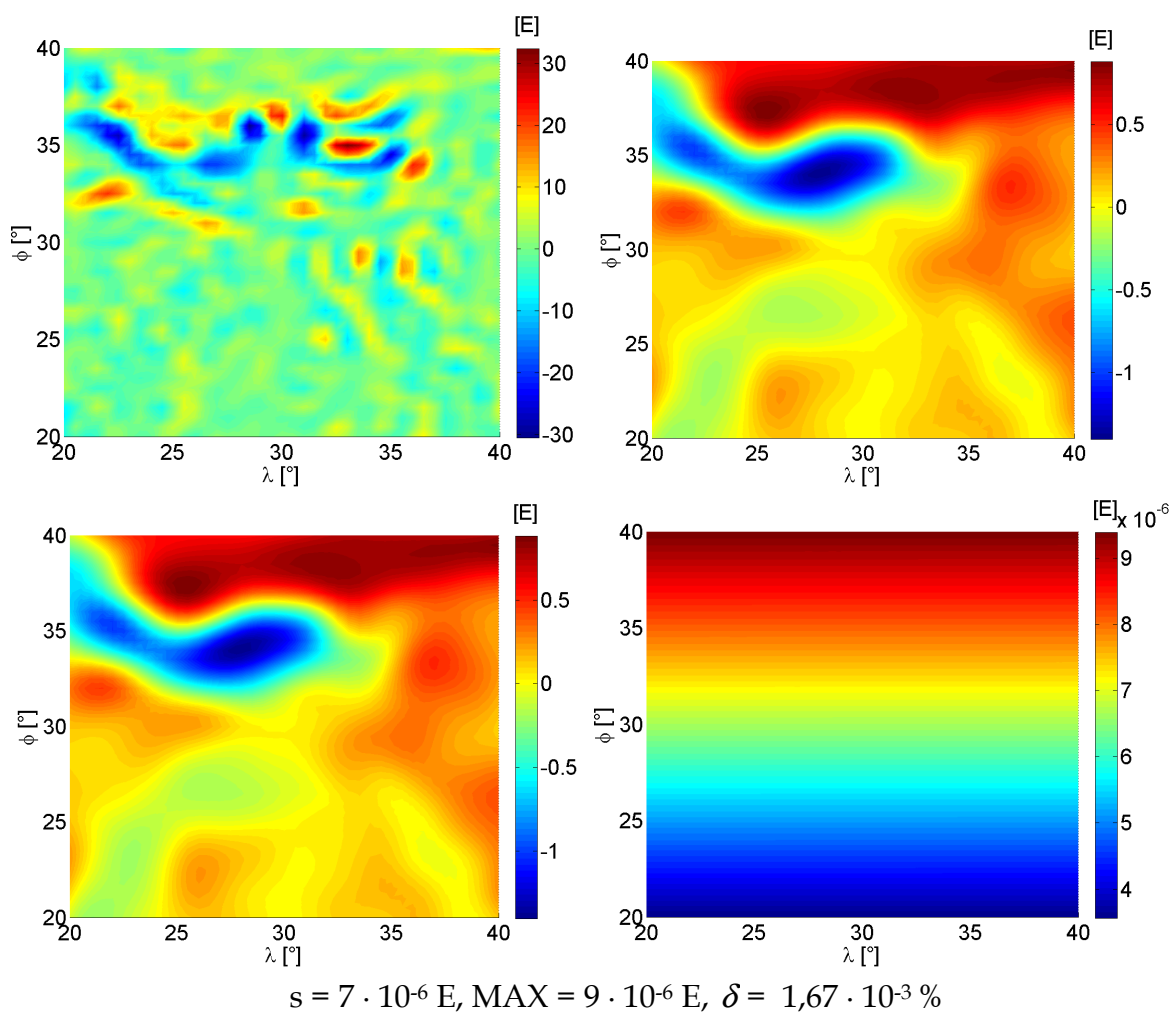
Jedna z nadcházejících kapitol bude věnována filtraci dat. Typickým jevem, který při filtraci nastává, je vyhlazování hodnot, tedy zmenšování jejich rozsahu. Proto bude často uváděna veličina nazvaná **minimální hodnota** představující  $\min_{i \in \langle 1, N \rangle} \{x_i\}$  a veličina **maximální hodnota** představující  $\max_{i \in \langle 1, N \rangle} \{x_i\}$ . (Nutno upozornit, že ve vzorci pro maximální hodnotu není absolutní hodnota, nejedná se tedy o maximovou normu vektoru. Výraz dokonce vůbec nesplňuje axiomy pro normu obecně.). Tyto hodnoty budou porovnávány s minimální a maximální hodnotou referenčních dat a bude podle nich posuzováno, nakolik se shoduje rozsah měřených (vypočtených) dat s rozsahem referenčních hodnot.

## 6.5 Test prodlužování syntetických gradiometrických dat

Z důvodu výpočetní rychlosti bylo testováno prodlužování gradiometrických dat pouze na oblasti B. Krok úhlové vzdálenosti prodlužovaných i výsledných hodnot byl zvolen jako 30 stupňových minut, což odpovídá asi 55 kilometrům na povrchu Země. Syntéza testovacích dat byla provedena od stupně 2 do stupně 250. Test prodlužování se bude odehrávat mezi dvěma geocentrickými sférami  $S_1(o, R)$  a  $S_2(o, R+250)$ , kde  $R$  je poloměr sféry nahrazující povrch Země ( $R \doteq 6378$  km). Test prodlužování gradiometrických dat nahoru tedy bude probíhat ze sféry  $S_1$  na sféru  $S_2$  a test prodlužování směrem dolů naopak. K prodlužování použijeme vztah ve spektrálním tvaru odvozený pomocí Fourierovy metody, tedy vztah v rov. (6-6).

### 6.5.1 Prodlužování syntetických gradiometrických dat bez šumu nahoru

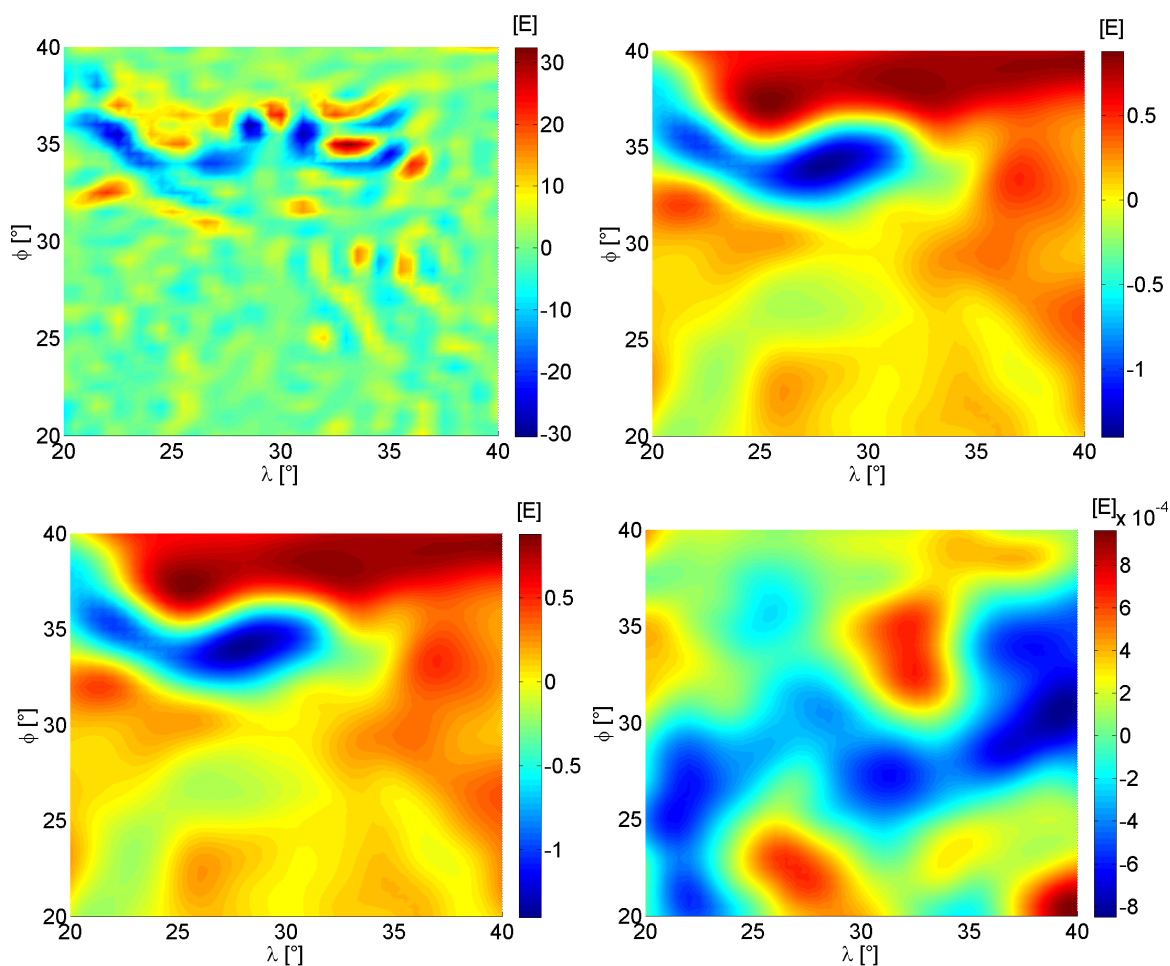
Na obr. 6-2 vidíme chování úlohy pro prodlužování nahoru po její diskretizaci a použití na syntetická data. Střední chyba dosáhla pouze hodnoty  $7 \cdot 10^{-6} E$ . Relativní chyba je řádově  $10^{-3} \%$ . Vztah v rov. (6-12) tedy pro prodlužování dat nezatížených šumem funguje a nepřesnost výpočtu je zanedbatelná. Podle charakteru odchylek (na obr. 6-2d vidíme, že chyba se mění pouze se zeměpisnou šířkou, nikoli délkou) jde pravděpodobně o integrační chybu vzniklou nahrazením integrálu sumací.



Obr. 6-2 Prodlužování syntetických dat bez šumu nahoru: a) (vlevo nahoře) data před prodloužením (výřez prodlužované oblasti), b) (vpravo nahoře) prodloužená data, c) (vlevo dole) referenční data, d) (vpravo dole) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

## 6.5.2 Prodlužování syntetických gradiometrických dat zatížených šumem nahoru

Na obr. 6-3 jsou zachyceny výsledky případu, kdy vstupní data byla upravena tak, že do nich byl přidán bílý šum o směrodatné odchylce  $0,01 E$ . Střední chyba tentokrát dosáhla hodnoty  $3,5 \cdot 10^{-4} E$ . Relativní chyba na vstupu je řádově  $10^{-3} \%$ . Relativní chyba na výstupu je řádově  $0,01 \%$ , tedy méně než jedno promile. Směrodatná odchylka šumu ve stupních datech a střední chyba výsledných dat jsou ve své podstatě stejné veličiny, můžeme je porovnat a povšimnout si, že prodlužováním nahoru se absolutní (ne však relativní) chyba dokonce zmenšila. To ukazuje, že pro tuto úlohu i po její diskretizaci zůstává v platnosti její numerická stabilita vůči vstupním datům.

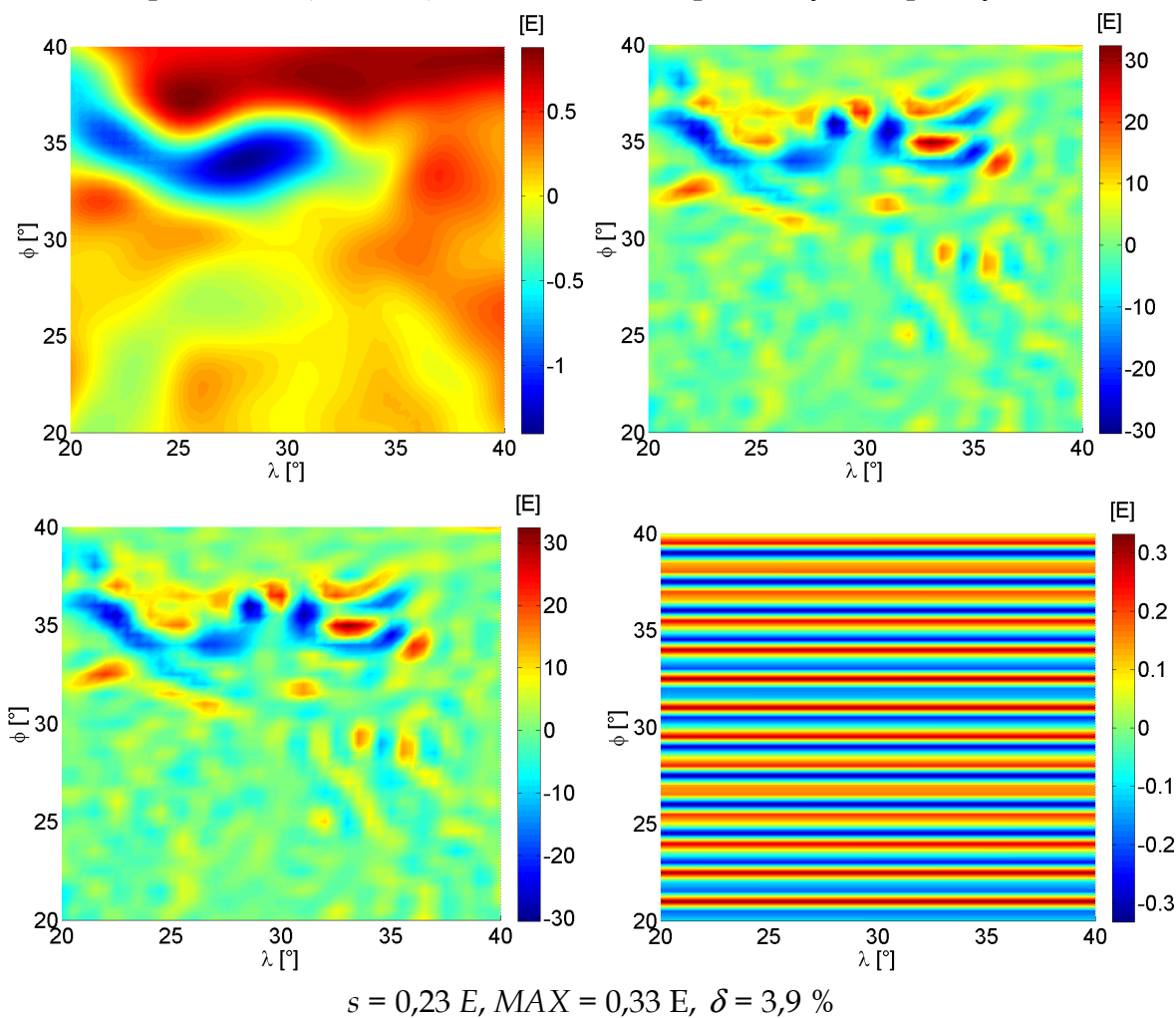


$$s = 3,45 \cdot 10^{-4} E, \text{ MAX} = 9,64 \cdot 10^{-4} E, \delta = 8,21 \cdot 10^{-2} \%$$

Obr. 6-3 Prodlužování syntetických dat zatížených šumem nahoru: a) (vlevo nahoře) data před prodloužením (výřez prodlužované oblasti) b) (vpravo nahoře) prodloužená data c) (vlevo dole) referenční data d) (vpravo dole) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

### 6.5.3 Prodlužování syntetických gradiometrických dat bez šumu dolů

Pokud prodlužujeme data směrem dolů, lze si ihned povšimnout rozdílů. Zatímco u prodlužování směrem nahoru dosahovala relativní chyba u syntetických dat bez přidaného šumu asi  $10^{-3}$  %, zde je to řádově již 1 %. Chyba (obr 6-4d) je opět pravděpodobně chybou integrační a mění se opět pouze se zeměpisnou šířkou. Podle vizuálního posouzení (obr. 6-4b) 1% šum v datech prakticky není patrný.

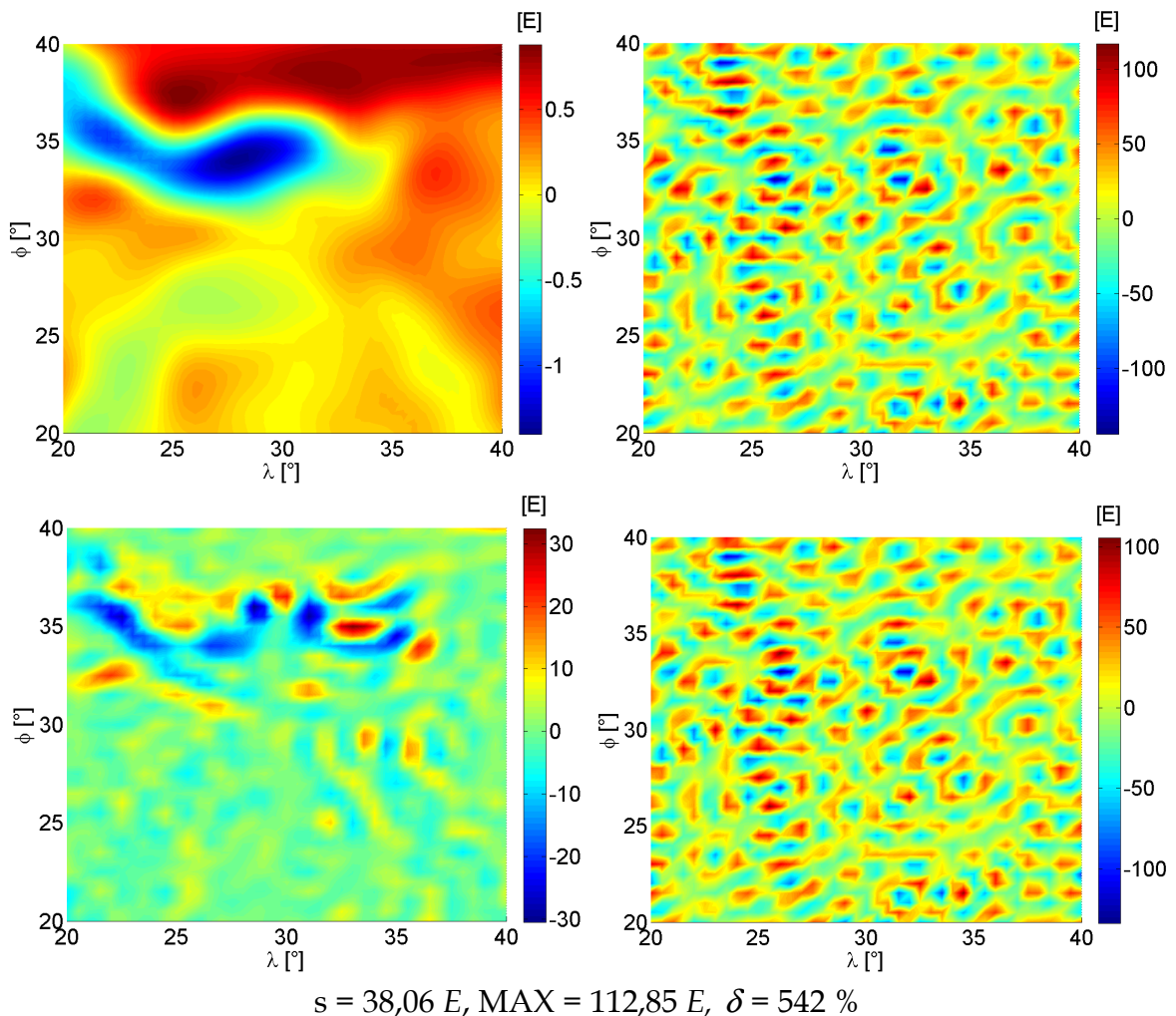


Obr. 6-4 Prodlužování syntetických dat bez šumu dolů: a) (vlevo nahoře) data před prodloužením (výřez prodlužované oblasti) b) (vpravo nahoře) prodloužená data c) (vlevo dole) referenční data d) (vpravo dole) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

### 6.5.4 Prodlužování syntetických gradiometrických dat zatížených šumem dolů

Pokud gradiometrická data s přidaným gaussovským šumem prodloužíme dolů, zjistíme, že úloha je velmi numericky nestabilní. Zatímco data bez šumu by měla být prodloužením zesílena asi 30krát, šum v datech byl zesílen asi 3 000krát a

jeho relativní velikost se tedy zvýšila z původní řádově 1 % na více než 500 %. V prodlouženém výsledku tak původní data úplně přestala být rozpoznatelná.

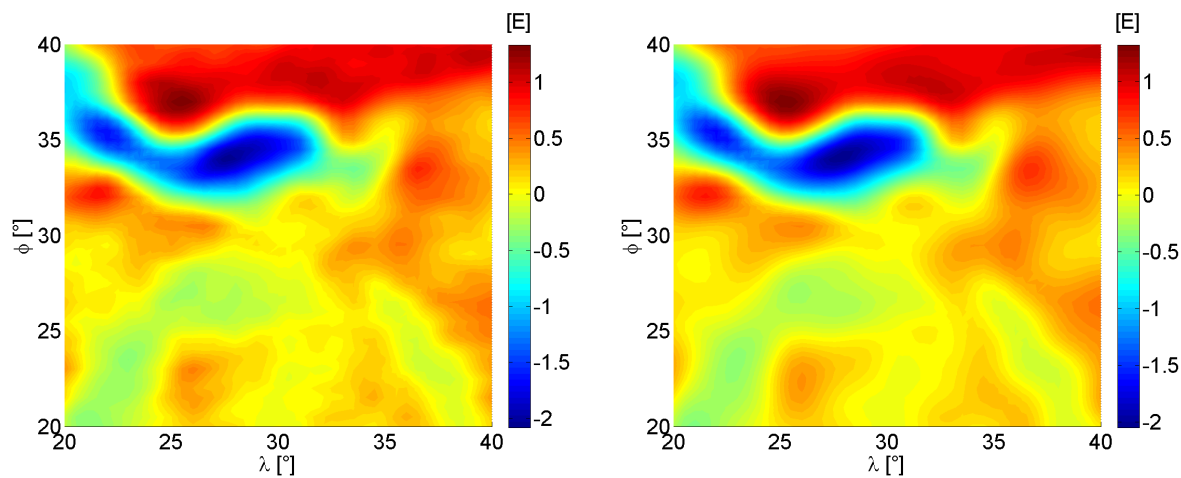


*Obr. 6-5 a) Prodlužování syntetických dat zatížených šumem dolů: (vlevo nahoře) data před prodloužením (výřez prodlužované oblasti) b) (vpravo nahoře) prodloužená data c) (vlevo dole) referenční data d) (vpravo dole) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty*

## 6.6 Narůstání chyb signálu během prodlužování dolů

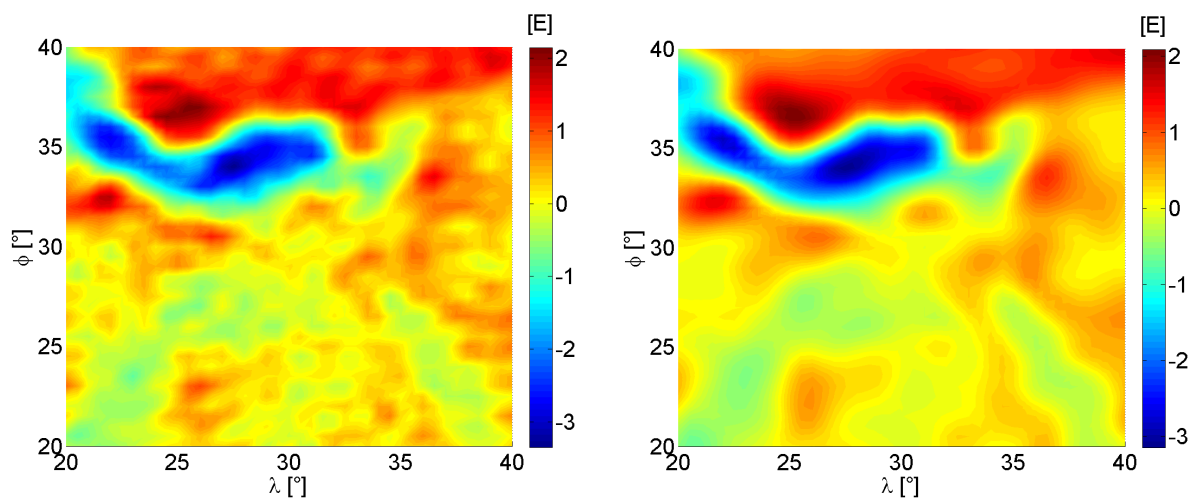
Jednou z možností, jak zpracovávat data z gradiometrických družicových měření, je nesnažit se data prodloužit až na povrch Země, ale zvolit jinou úroveň nad povrchem Země, kde by již prodloužená data byla využitelná a zároveň by tam relativní chyby vzniklé prodlužováním dosahovaly ještě „rozumných“ hodnot. Jako přijatelné se jeví sférické plochy s výškou cca 100 km nad povrchem Země. Z tohoto důvodu budou nyní uvedeny výsledky prodlužování na různé úrovně nad Zemí. Na sérii obr. 6-6 až 6-10 se vždy nalevo nachází prodloužená data a napravo referenční data z modelu EGM08. Data, která byla prodlužována, byla stejně jako v předchozích

případech vypočtena syntézou z modelu EGM08 a byl do nich přidán šum o nulové střední hodnotě a směrodatné odchylce 0,01 E.



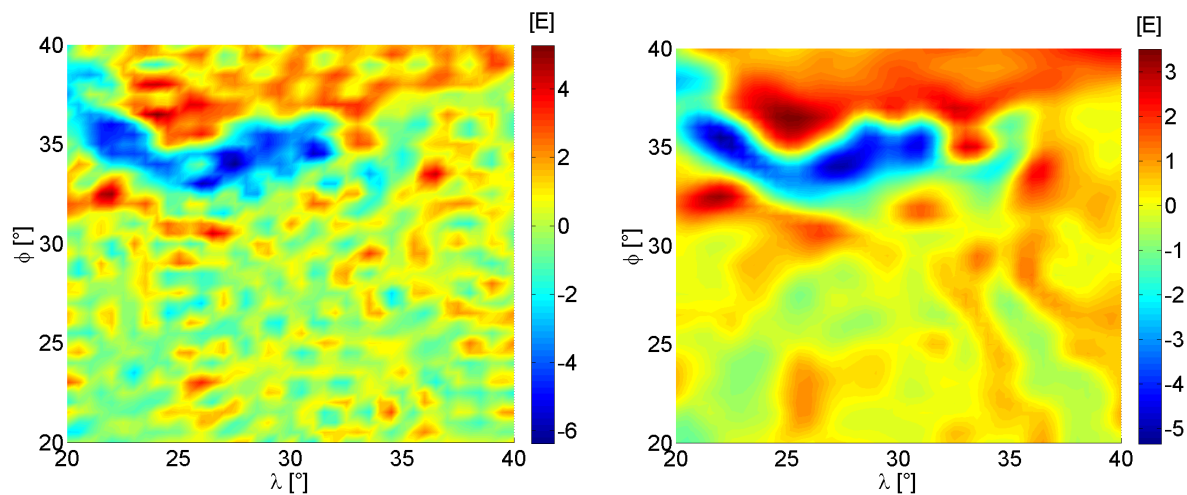
$$s = 0,02 \text{ E}, \text{ MAX} = 0,09 \text{ E}, \delta = 3,6 \%$$

Obr. 6-6 Výsledek prodlužování o 50 km (do výšky 200 km nad Zemí)



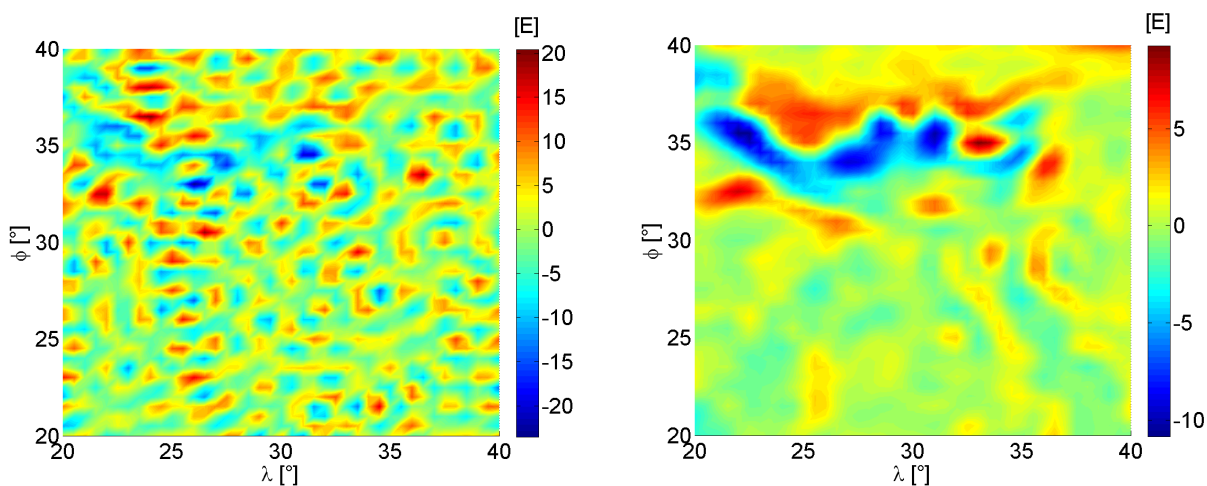
$$s = 0,14 \text{ E}, \text{ MAX} = 0,46 \text{ E}, \delta = 17\%$$

Obr. 6-7 Výsledek prodlužování o 100 km (do výšky 150 km nad Zemí)



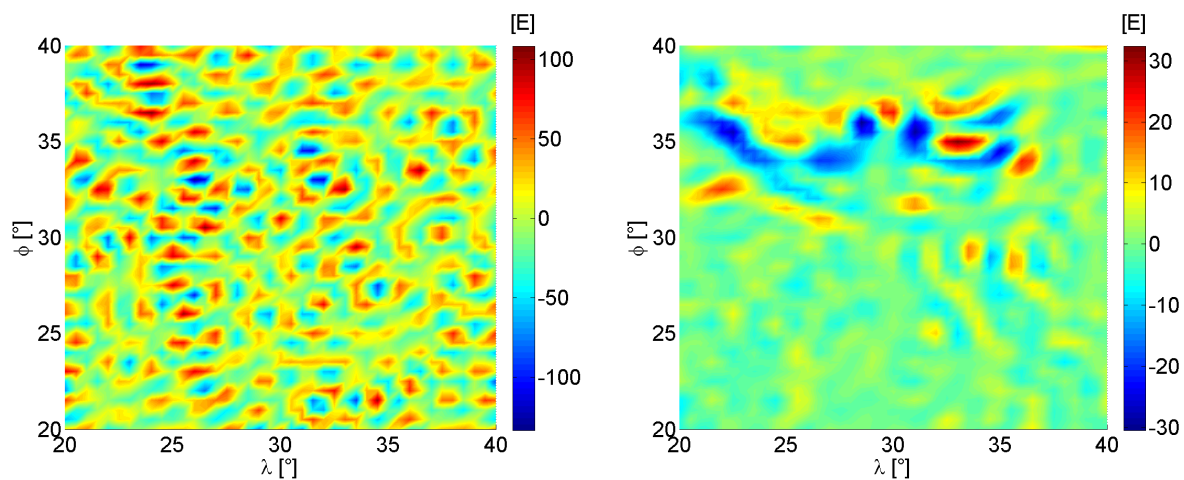
$$s = 0,86 \text{ E}, \text{ MAX} = 2,71 \text{ E}, \delta = 68 \%$$

Obr. 6-8 Výsledek prodlužování o 150 km (do výšky 100 km nad Zemí)



$$s = 5,39 \text{ E}, \text{ MAX} = 16,59 \text{ E}, \delta = 232 \%$$

Obr. 6-9 Výsledek prodlužování o 200 km (do výšky 50 km nad Zemí)



$$s = 35,25 \text{ E}, \text{ MAX} = 105,56 \text{ E}, \delta = 592 \%$$

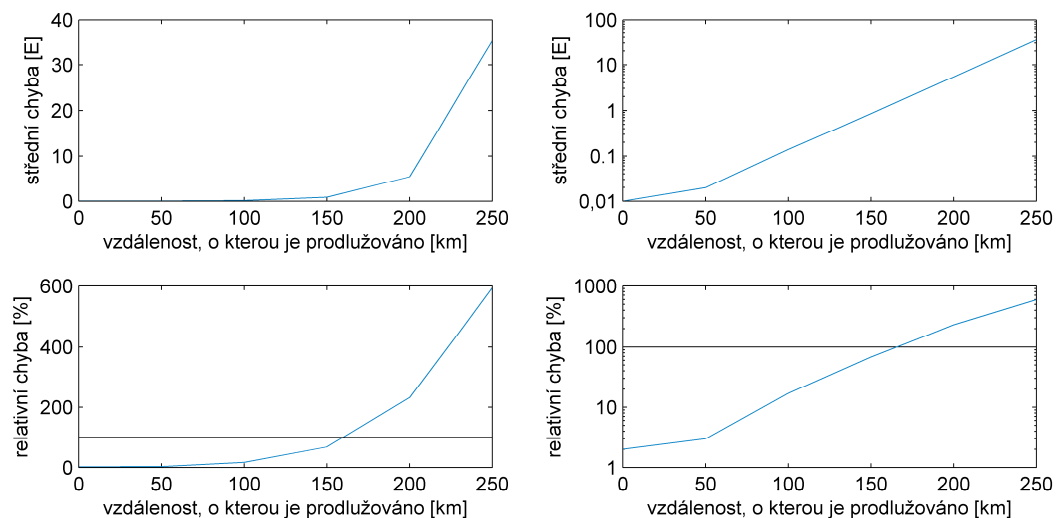
Obr. 6-10 Výsledek prodlužování o 250 km (na povrch Země)



Výška nad povrchem Země [km]	Prodlouženo o vzdálenost [km]	Střední chyba [E]	Maximální chyba [E]	Kvadratický průměr referenčních hodnot [E]	Relativní chyba [%]
250	0	0,01	0,04	0,42	2,4
200	50	0,02	0,09	0,56	3,6
150	100	0,14	0,46	0,81	17,3
100	150	0,86	2,71	1,27	67,7
50	200	5,39	16,59	2,32	232,3
0	250	35,25	105,56	5,95	592,4

Tab. 6 - 1 Nárůst chyb v závislosti na vzdálenosti, o kterou je prodlužováno

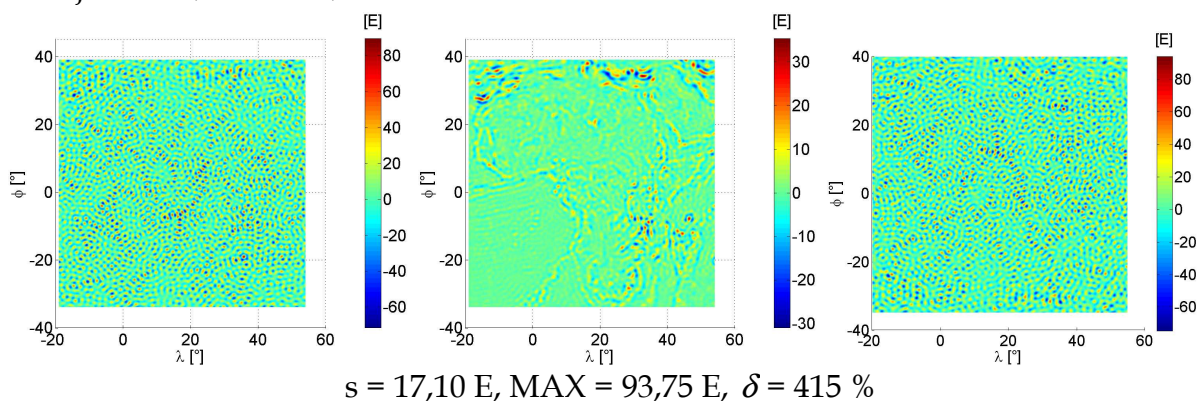
Přehled nárůstu chyb během prodlužování je uveden v tab. 6-1. Vidíme, že nejen hodnoty absolutní, ale i relativní chyby během procesu prodlužování stále narůstají. Hladinu 10 % například překročí více než 150 km nad Zemí a mezi 50 a 100 km nad Zemí už střední hodnota šumu přesáhne střední hodnotu samotných dat. Nárůst je zobrazen také na grafech na obr. 6-11. Horní dvojice obrázků ukazuje závislost střední chyby na vzdálenosti, dolní dvojice zobrazuje závislost relativní chyby na vzdálenosti. V obou řádcích má levý graf lineární osu y a pravý graf logaritmickou osu y, jinak se zobrazené hodnoty nalevo a napravo nijak neliší. Logaritmická osa je volena proto, že lépe ukazuje exponenciální trend nárůstu šumu.



Obr. 6-11 Závislost chyby na vzdálenosti: a) (vlevo nahoře) střední chyba (lineární osa y), b) (vpravo nahoře) střední chyba (logaritmická osa y), c) (vlevo dole) relativní chyba (lineární osa y), d) (vpravo dole) relativní chyba (logaritmická osa y)

## 7 Metody filtrace prodloužených gradiometrických dat a jejich testování

Jednotlivé metody filtrace budeme testovat na oblasti A (viz obr. 6-1). Větší z obou testovaných oblastí je vybrána proto, že větší vzorek dat nám umožní lépe posoudit kvalitu výsledku. Navíc větší množství dat umožní přesněji spočítat jejich Fourierovu transformaci. Výchozími daty pro testování filtrace jsou tedy gradienty  $V_{zz}$  vypočítané syntézou z EGM2008 pro stupně harmonické řady 50 až 250 po přidání šumu a následném prodloužení (obr 7-1a). Referenční data, ke kterým se snažíme filtrací přiblížit, jsou data na kouli nahrazující povrch Země vypočtená syntézou z EGM2008 rovněž pro stupně harmonické řady 50 až 250 (obr 7-1b). K posouzení kvality filtrovaných výsledků budou použity především veličiny střední chyba, maximální chyba a minimální a maximální hodnota dat, které byly definovány v kapitole 6.5. K porovnání rozsahu je třeba znát rozsah referenčních dat - ten je od -31,0 E do 35,3 E.



Obr. 7-1 Data pro testování filtrace: a) prodloužená data, b) referenční data, c) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

### 7.1 Filtrace pomocí Fourierovy transformace

Filtrace pomocí Fourierovy transformace (FT) je metoda využívající skutečnosti, že šum se v datech obvykle vyskytuje na určitých (vysokých) frekvencích. Samotná Fourierova transformace je zobrazení převádějící data z (v tomto případě) prostorové reprezentace do reprezentace frekvenční. Jejím výsledkem jsou tedy data ve tvaru, kde na osách se nacházejí frekvence v na sebe kolmých směrech a funkčními hodnotami jsou komplexní čísla vyjadřující amplitudy a zároveň fáze příslušné daným frekvencím. Pokud tedy data byla dvojrozměrná (nacházíme se na povrchu konkrétní koule, takže k popisu polohy stačí dvě úhlové souřadnice  $\phi$  a  $\lambda$ ), transformovaný obraz bude také dvojrozměrný. Hodnoty ležící

přímo na jedné z os budou tedy popisovat amplitudu a fázi vln, které mají směr  $\phi$  a jsou kolmé na  $\lambda$ , na druhé z os to bude naopak. Čím dále jsou hodnoty od počátku, tím vyšším frekvencím náleží.

Aplikováním inverzní Fourierovy transformace na transformovaný obraz lze poté získat obraz původní. Toho lze využít tím způsobem, že transformovaný obraz může být určitým způsobem upraven a tyto změny se poté projeví v původním obrazu. Například šum se obvykle vyskytuje na vyšších frekvencích, takže pokud budou tyto frekvence potlačeny, případně odstraněny, šum by z původního obrazu měl vymizet. Ačkoli u družicových gradiometrických dat jejich vlastnosti (zde nás zajímá především podíl šumu v datech) mírně závisí i na směru vln (měření je přesnější ve směru pohybu družice), budeme tyto rozdíly zanedbávat. Uvažujeme tedy, že míra šumu závisí pouze na frekvenci. A jelikož hodnoty náležející stejné frekvenci leží na kružnici se středem v počátku, budou všechny úpravy dat ve spektrálním tvaru voleny tak, aby byly radiálně symetrické. K potlačení vysokofrekvenčního šumu se typicky využívá odstranění vyšších frekvencí (dolnoproústný filtr), hornoproústný filtr se naopak používá např. k detekci hran. Celý postup bude názorněji ukázán v rámci popisu konkrétní metody filtrace např. v kapitole 7.1.1 na obr. 7-2. Více o filtraci Fourierovou transformací viz (Nixon a Aguado, 2002).

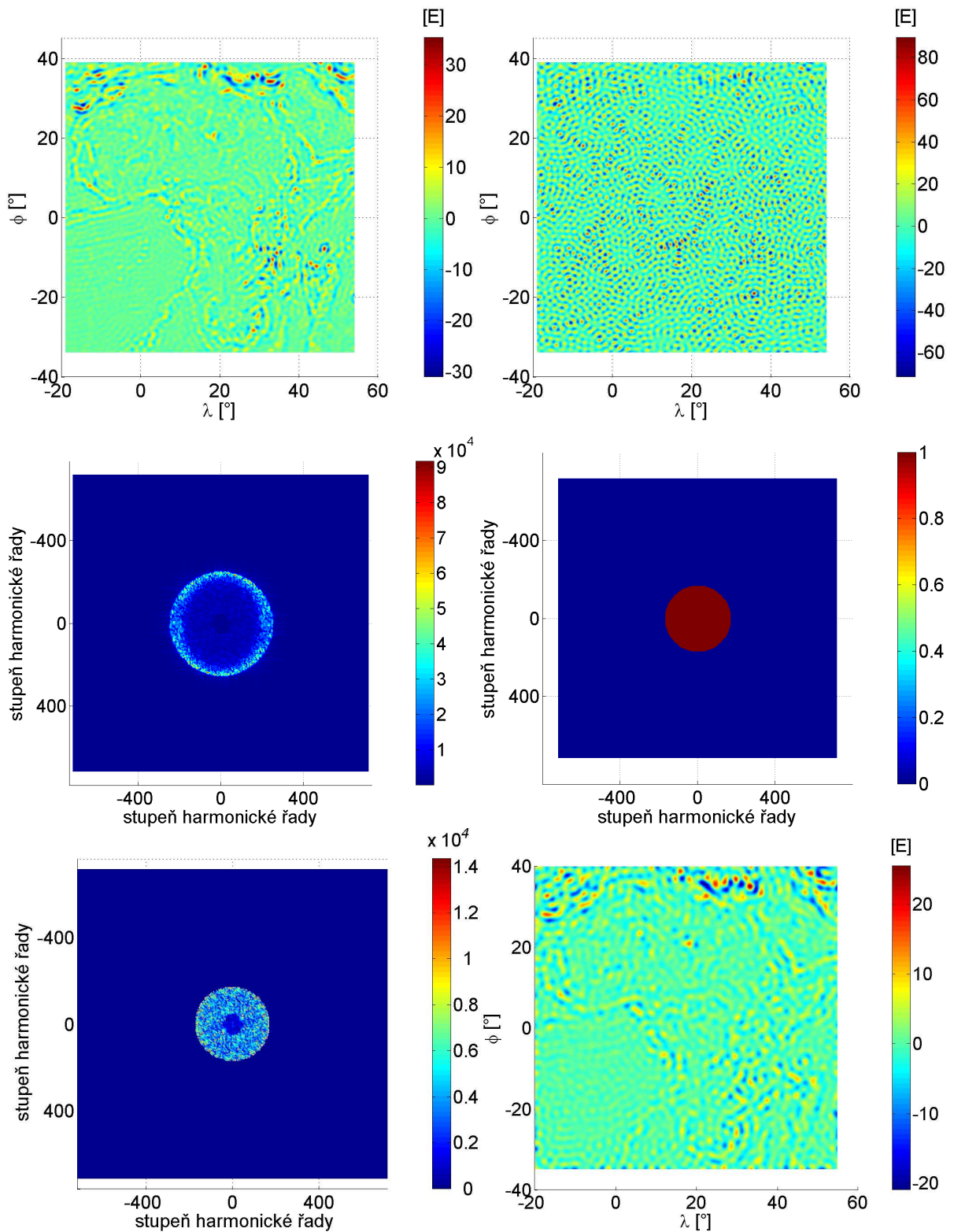
Metodu lze ovšem využít jenom v omezené míře. S každou frekvencí, která je odstraněna kvůli vyfiltrování šumu, se ztrácí i informace z původního obrazu, které měly tutéž frekvenci. Jelikož šum se může vyskytovat v široké škále frekvencí, jejich úplným odstraněním by byla ztracena podstatná část vstupních informací. Filtrování je tak vždy kompromisem mezi množstvím šumu, který zůstane obsažen v datech, a množstvím dat, která budou odstraněna spolu s šumem.

Jak již bylo vysvětleno dříve, frekvence lze vyjadřovat také jako stupeň harmonických řad. Tak tomu bude i v této kapitole.

### 7.1.1 Dolnoproústná filtrace (low-pass)

Dolnoproústný způsob filtrace signálu, kdy je na obraz ve Fourierově transformaci aplikovaná kruhová maska, která má uvnitř kruhu hodnoty 1 (ponechává hodnoty dat nezměněné) a vně kruhu hodnoty 0 (hodnoty úplně odstraňuje). Kruhová je proto, že (jak bylo uvedeno výše) vlastnosti dat nezávisí na směru prostorových vln, ale pouze na jejich frekvenci. Množina hodnot s frekvencí menší nebo rovnou zvolené hodnotě propustí tvoří kruh. Z obrazu jsou tedy odstraněny vyšší frekvence, zatímco nižší jsou propuštěny do výsledného obrazu (odtud dolnoproústný filtr).

Dolnoprostopustnou filtrací byly při aplikování na prodloužená gradiometrická data získány nejlepší výsledky ze všech metod, a proto zde budou její výsledky také nejpodrobněji zdokumentovány.



Obr. 7-2 Průběh filtrování pomocí FT s propustí odpovídající stupni 170: a) referenční hodnoty  $V_{zz}$  z modelu b) prodloužená data zatížená šumem c) transformovaný obraz d) maska (propust) e) transformovaný obraz po aplikaci masky f) výsledek filtrace po zpětné transformaci

Obrázek 7-2 zachycuje jednotlivé kroky filtrace. Na obr. 7-2 a) (nahore vlevo) jsou data z modelu EGM08 (gradient  $V_{zz}$ ), která zde slouží jako referenční data, s nimiž je porovnáván výsledek. Na obrázku b) (vpravo nahore) je skutečný stav dat po prodloužení – tedy data velmi zatížená šumem, jehož rozsah hodnot je více než dvakrát větší než původní hodnoty. Na obrázku c) jsou vidět data po dvourozměrné Fourierově transformaci (zobrazená je jejich absolutní hodnota). Na d) je maska, kterou budou transformovaná data přenásobena (ve smyslu násobení po prvcích, nikoli maticově). Maskou je kruh o poloměru odpovídajícímu stupni 170 harmonické řady. Výsledek po aplikaci masky je na dalším obrázku e). Na posledním obrázku f) je poté produkt celé filtrace po zpětné transformaci z frekvenční oblasti do prostorové.

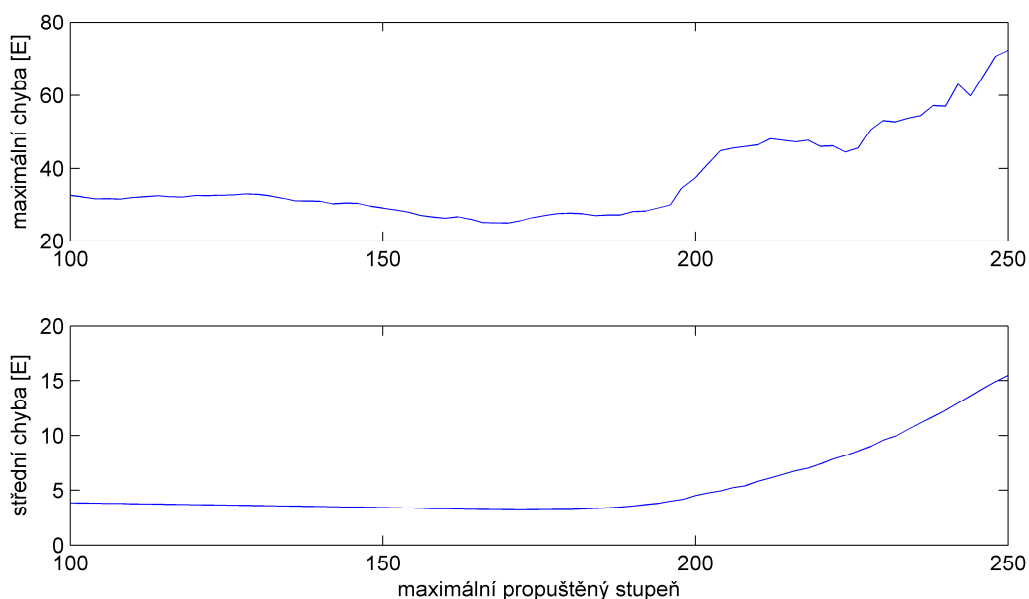
Z obrázku 7-2f vidíme, že se data filtrace přiblížila datům referenčním (obr. 7-2a). Je to patrné jednak z hodnoty střední chyby, ale také vizuálním posouzením. V datech je již možné rozeznat obrysy kontinentu i místa s extrémními hodnotami dat. Hůře je na tom shoda rozsahu referenčních a filtrovaných dat. Rozsah lze do jisté míry upravovat posunutím propusti.

Horní hranice frekvencí	s [E]	$\delta$ [%]	MAX chyba [E]	Min. hodnota [E]	Max. hodnota [E]
100	3,82	93	32,49	-13,51	14,48
110	3,74	91	31,91	-15,06	15,92
120	3,66	89	32,48	-16,71	15,51
130	3,58	87	32,76	-17,97	15,95
140	3,49	85	30,88	-19,09	18,92
150	3,38	82	29,04	-19,06	21,21
160	3,28	80	26,24	-20,95	22,98
170	3,20	78	24,94	-20,92	25,45
180	3,22	78	27,63	-23,79	27,95
190	3,54	86	28,11	-28,67	29,98
200	4,50	109	37,57	-38,01	36,11
210	5,82	142	46,39	-47,87	46,66
220	7,40	180	45,96	-59,23	58,08
230	9,57	233	53,03	-65,72	56,74
240	12,28	299	57,04	-63,66	62,58

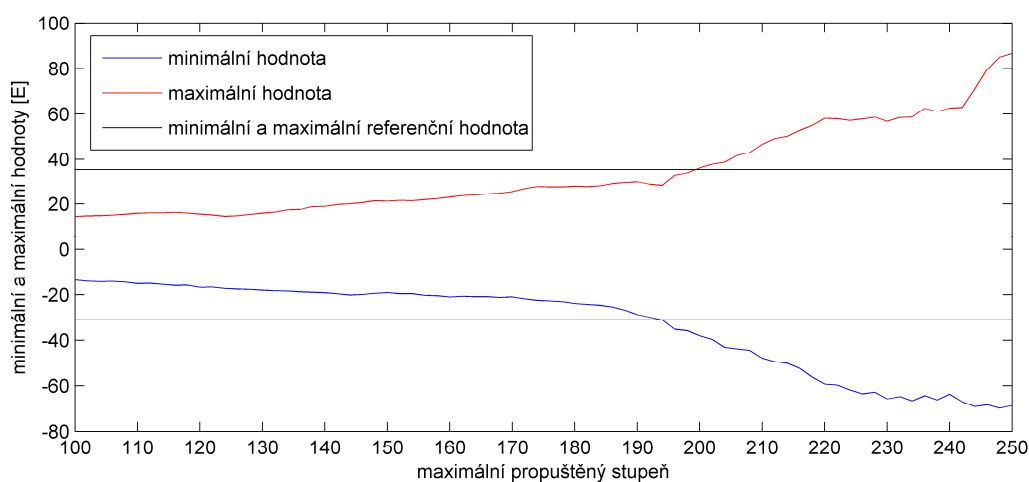
Tab. 7 - 1 Tabulka výsledků dolnopropustné filtrace.

Z tab. 7-1 a grafů na obr. 7-3 a 7-4 je ovšem zřejmé, že volba ideálního prahu frekvence pro propust nemá jednoznačné řešení. V případě, že hlavním kritériem budou odchylky od referenčních dat (ať už chyba maximální či střední), bude

ideálním prahem přibližně hodnota 170. Bude-li po výsledku vyžadována spíše shoda v rozsahu hodnot (referenční hodnoty z modelu mají rozsah cca od -31,0 E do 35,3 E), je nutné propustit i frekvence vyšší (190, případně 200).

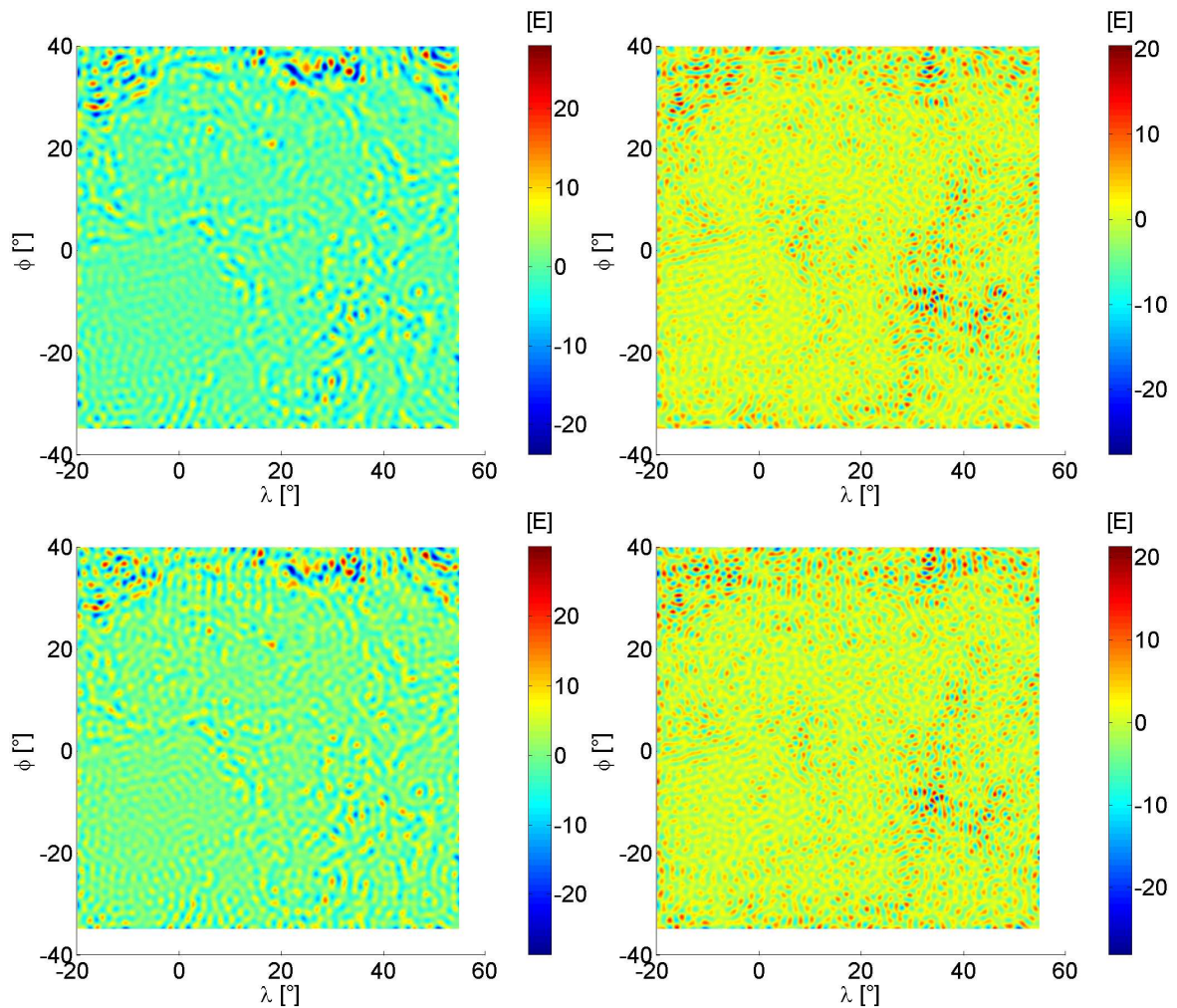


Obr. 7-3 Závislost střední a maximální chyby na maximálním propouštěném stupni



Obr. 7-4 Závislost minimální a maximální hodnoty na maximálním propouštěném stupni

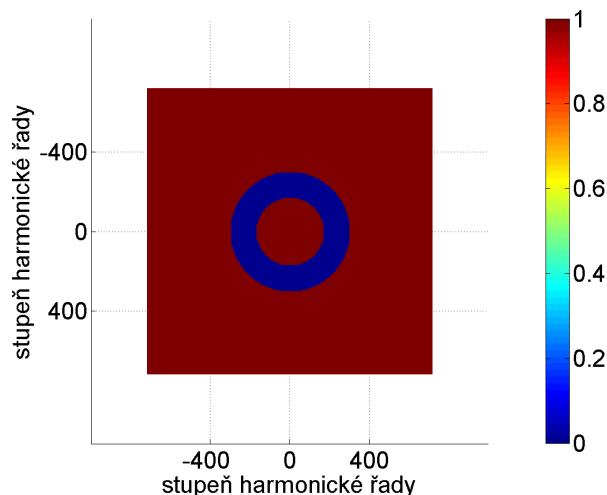
Výsledek filtrování pro hodnotu propusti s nejmenší střední chybou, tedy propusti s frekvencí 170, byl již ukázán výše spolu s celým postupem filtrace. Obrázek 7-5 ukazuje výsledky pro další hodnoty propustí s horší střední chybou, ale lepší shodou rozsahu hodnot.



Obr. 7-5 Ukázky výsledků filtrování pro propust o frekvenci 180, 190: a) výsledek filtrace o hodnotě propusti 180, b) odchyly výsledku filtrace o hodnotě propusti 180 oproti ref. datům, c) výsledek filtrace o hodnotě propusti 190, b) odchyly výsledku filtrace o hodnotě propusti 190 oproti ref. datům

### 7.1.2 Pásmová filtrace (band-pass)

Zatímco v dolnoproputné filtraci jsou odstraněny všechny hodnoty od určité hodnoty frekvence, v pásmové filtraci je vybrán určitý interval frekvencí, které budou z obrazu odstraněny (případně může být vybrána část, která bude ponechána). To může být výhodné, pokud se šum výrazně vyskytuje na určitém pásmu frekvencí, zatímco jak na nižších, tak na vyšších frekvencích mimo pásmo se vyskytuje minimálně. Masky pásmového filtru je znázorněna na obr. 7-6.



Obr. 7-6 Znáznornění pásmové propusti

Bylo však zjištěno, že pro tento typ dat nenechází tato metoda využití, protože data jsou spektrálně omezená a jejich maximální frekvence jsou zároveň frekvencemi, kde se vyskytuje nejvíce šumu. Ideální pásmo k odstranění z obrazu by proto zahrnovalo nejvyšší obsažené frekvence, a výsledek by tudíž byl podobný jako u propustného filtru. Jelikož se však malá část šumu vyskytuje i na tak vysokých frekvencích, na kterých se již nevyskytují data, je výsledek horší a k chybám stejně malým jako u propustného filtru lze dospět pouze rozšiřováním horní meze odstraňovaného pásma frekvencí, tedy vlastně přibližováním se opět k filtru propustnému.

Následující *tab. 7-2* s výsledky pásmové filtrace je zde tedy uvedena spíše pro úplnost.

horní hranice \ dolní hranice	210	220	230	240	250
100	15,32	14,58	13,08	10,32	4,99
110	15,30	14,56	13,06	10,29	4,93
120	15,28	14,54	13,04	10,26	4,86
130	15,26	14,52	13,02	10,23	4,80
140	15,24	14,50	13,00	10,20	4,74
150	15,22	14,47	12,96	10,17	4,66
160	15,19	14,45	12,94	10,13	4,58
170	15,18	14,43	12,92	10,11	4,53
180	15,18	14,44	12,92	10,11	4,55
190	15,25	14,51	13,00	10,22	4,78
200	15,50	14,77	13,30	10,59	5,52

Tab. 7 - 2 Tabulka výsledků pásmové filtrace (střední chyba [E])

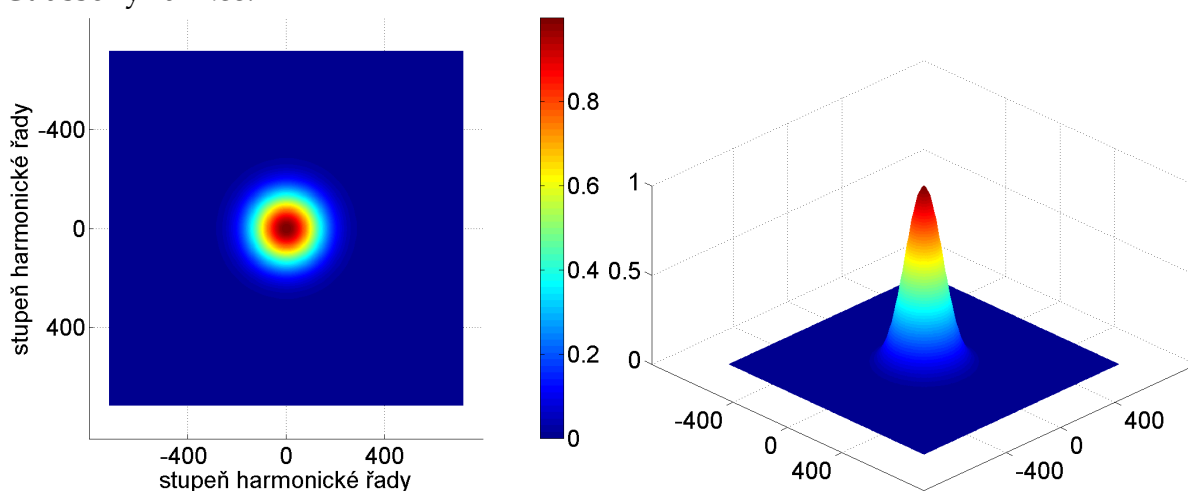


### 7.1.3 Gaussova filtrace ve spektru

Gaussova spektrální filtrace se od předchozích metod filtrace liší tím, že nerozděluje spektrum striktně na frekvence, které budou z obrazu odstraněny a které budou beze změny ponechány. Princip spočívá v přenásobení transformovaných dat váhovou funkcí ve tvaru (Nixon a Aguado, 2002 )

$$f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}}, \quad (7-2)$$

kde  $x$  a  $y$  jsou prostorové souřadnice v transformovaném obrazu a  $\sigma^2$  je rozptyl Gaussovy funkce.



Obr. 7-7 Gaussova filtrace ve spektru – váhová funkce

Amplitudy a fáze odpovídající nulovým frekvencím tedy zůstávají nezměněny, zatímco vyšší frekvence jsou postupně tlumeny (čím dále od počátku, tím vyšší tlumení). Toho lze využít například, pokud množství šumu v datech narůstá se stoupající frekvencí.

V tab. 7-3 je vidět, že Gaussova filtrace dosahuje v průměru nižších středních chyb, přesto je jejich nejnižší hodnota (pro odmocninu z rozptylu neboli směrodatnou odchylku rovnou 140) vyšší než u propustné filtrace. Navíc při nastavení rozptylu na optimální hodnotu vzhledem ke střední chybě mají hodnoty mnohem menší rozsah, než by podle referenčních dat měly mít. Barevně jsou v tabulce opět pro každou veličinu zvýrazněny optimální hodnoty.

Gaussova filtrace také neposkytla lepší výsledky než propustný filtr. Rozdíl mezi hodnotami směrodatné odchylky, kde je minimální chyba (140) a kde se nejlépe shoduje rozsah hodnot (220), je zde velmi vysoký. Při nízké chybě mají filtrovaná data příliš nízký rozsah. Naopak, při relativně správném rozsahu dat je vyšší chyba.

Odmocnina rozptylu váhové funkce	s [E]	$\delta$ [%]	MAX [E]	Minimální hodnota [E]	Maximální hodnota [E]
100	3,63	88	31,20	-9,36	8,17
110	3,52	86	30,37	-10,96	9,18
120	3,41	83	29,39	-12,55	10,32
130	3,34	81	28,29	-14,09	11,55
140	3,32	81	27,13	-15,57	13,50
150	3,37	82	25,95	-17,03	15,54
160	3,53	86	24,78	-18,56	17,53
170	3,77	92	23,64	-20,02	19,47
180	4,09	100	24,13	-22,26	21,31
190	4,47	109	24,63	-24,88	23,24
200	4,89	119	25,04	-27,40	26,15
210	5,33	130	25,37	-29,81	29,20
220	5,78	141	25,61	-32,09	32,15
230	6,22	151	25,95	-34,23	34,99
240	6,67	162	27,53	-36,25	37,70

Tab. 7 - 3 Tabulka výsledků Gaussovy filtrace

## 7.2 Filtrace dat průměrováním

Při filtrování dat je možné využít předpokladu, že šum má nulovou střední hodnotu. Tedy průměrováním šumu přes dostatečně velkou oblast by měla vyjít nulová hodnota. Data samozřejmě není možné průměrovat přes celou oblast, ale lze je průměrovat lokálně. To znamená, že pro každý bod zvolíme okolí bodů ve tvaru sférického čtyřúhelníku, viz *obr. 7-8* a z jejich průměru vypočítáme novou hodnotu pro tento bod.

Některé metody filtrace průměrováním jsou popsány v následujících podkapitolách, kde jsou uvedeny i jejich výsledky. Kromě uvedených metod byla navíc vyzkoušena metoda rotující masky a filtrace mediánem. Ty však nevedly k použitelným výsledkům, a proto se jimi nebudeme zabývat. Všechny typy průměrových filtrací jsou uvedeny v (Šonka, Hlaváč a Boyd, 2008).

### 7.2.1 Obyčejné průměrování

Bereme-li například okolí tvořené dvaceti pěti body (*obr. 7-8*), potom novou hodnotu pro bod ve středu spočítáme jako

$$\bar{a}_{13} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} a_i \quad (7-3)$$

a1	a2	a3	a4	a5
a6	a7	a8	a9	a10
a11	a12	<b>a13</b>	a14	a15
a16	a17	a18	a19	a20
a21	a22	a23	a24	a25

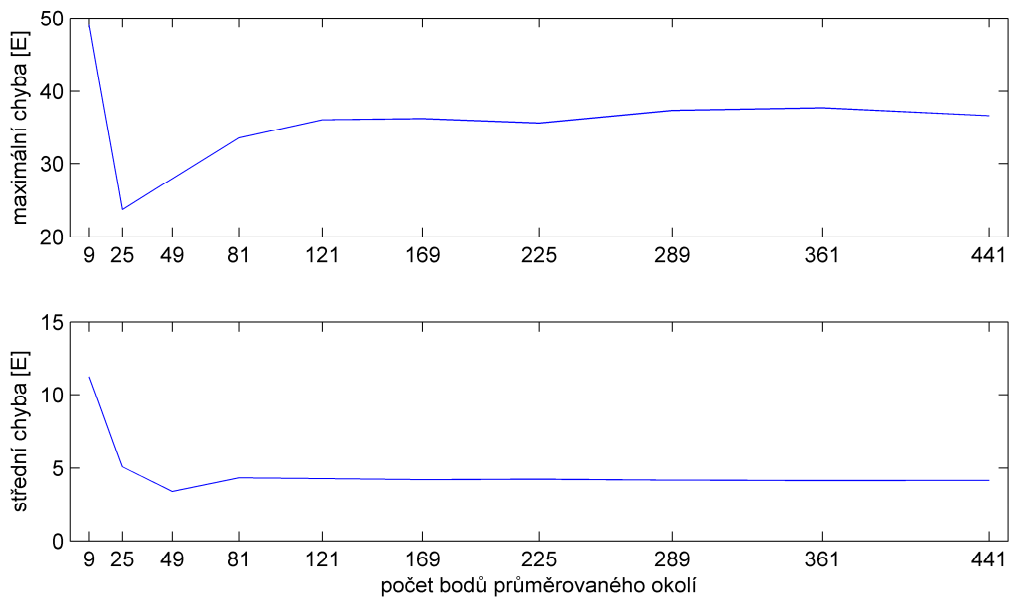
Obr. 7-8 Okolí 5x5 bodů

Stejně jako v případě dolnoproustné Fourierovy transformace byla zásadní otázkou volba hodnoty propusti, zde je výsledek závislý na volbě velikosti okolí. Menší okolí méně vyhladí šum, ale také méně vyhladí samotná data. Větší okolí zbaví data lépe šumu, ale zároveň i minimálních a maximálních hodnot samotných dat. Rozsah hodnot tak bude výrazně snížen.

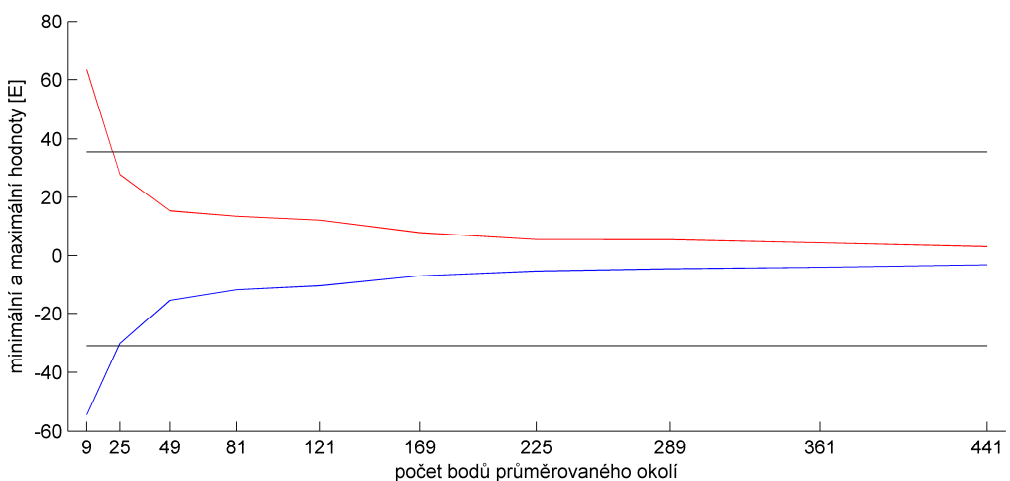
Počet bodů průměrovaného okolí	s [E]	δ [%]	MAX [E]	Minimální hodnota [E]	Maximální hodnota [E]
<b>9</b>	11,23	273	49,04	-54,44	63,41
<b>25</b>	5,08	<b>124</b>	<b>23,73</b>	<b>-30,16</b>	<b>27,70</b>
<b>49</b>	<b>3,39</b>	82	27,93	-15,49	15,38
<b>81</b>	4,33	105	33,57	-11,89	13,56
<b>121</b>	4,28	104	36,07	-10,52	12,23
<b>169</b>	4,20	102	36,23	-7,13	7,93

Tab. 7 - 4 Tabulka výsledků průměrové filtrace

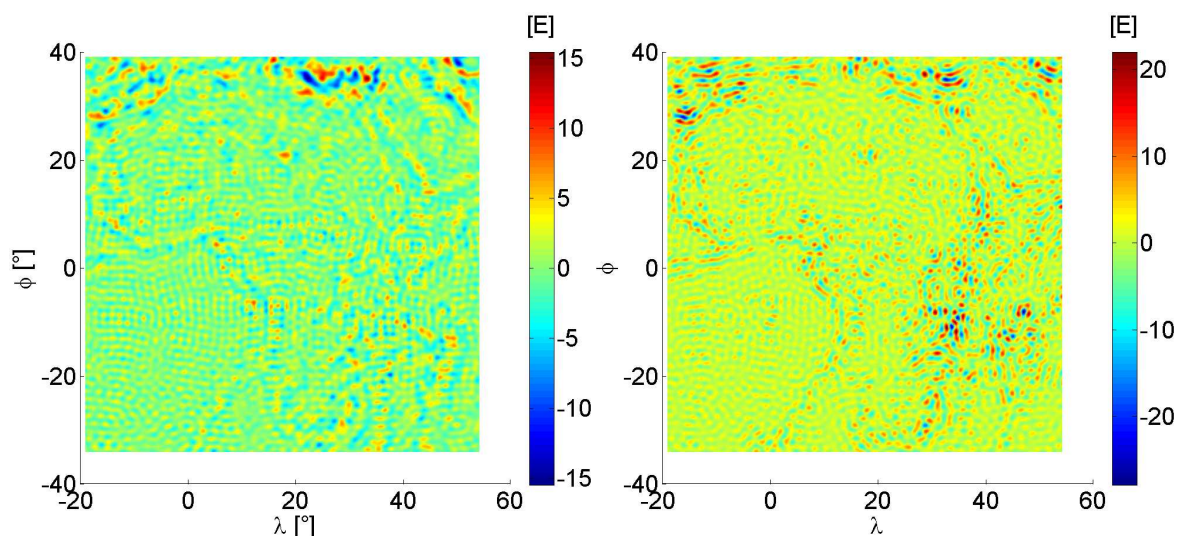
Tabulka 7-4 a grafy na obr. 7-9 a 7-10 ukazují závislost výsledků dle různých hodnotících kritérií (střední chyba, relativní chyba, maximální chyba, shoda rozsahu hodnot) na velikosti okolí, které průměrujeme pro získání nové hodnoty v bodě. Z výsledků je patrné, že optimální oblastí pro průměrování je oblast o velikost 49 bodů, pro kterou jsou výsledky filtrování i dosažené odchylky zobrazeny ještě na obr. 7-11.



Obr. 7-9 Závislost střední a maximální chyby na počtu bodů průměrovaného okolí



Obr. 7-10 Závislost minimální a maximální hodnoty na počtu bodů průměrovaného okolí



Obr. 7-11 Výsledky filtrování (vlevo) a odchylky od referenčních hodnot (vpravo) pro průměrování přes 49 bodů

## 7.2.2 Vážené průměrování

Kromě běžného průměrování, kde má každý bod z vybraného okolí stejnou váhu ve vypočítávaném průměru, lze použít také vážené průměrování. U něj je možno dát bodům ve středu průměrované oblasti, tedy blíže bodu, jehož novou hodnotu stanovujeme, vyšší váhu než bodům vzdálenějším. Pro některé aplikace dokonce může být výhodné zvolit postup opačný, tedy potlačit hodnotu prostředního bodu a vypočítat jeho novou hodnotu z bodů okolních. Některé takovéto masky byly vyzkoušeny i na prodloužená gradiometrická data.

Vážené průměry byly použity v okolí tvořeném 49 body, jelikož pro něj dosáhlo nevážené filtrování výrazně nejlepších výsledků. Výsledky jsou zobrazeny v tabulce 7-5, přičemž první řádek pro srovnání ilustruje příklad neváženého průměru z předchozí kapitoly.

Z výsledků v tab. 7-5 je patrné, že vážením lze dosáhnout mírně lepších hodnot než obyčejným průměrováním, jedná se však o malé rozdíly a pravděpodobně není možné najít univerzální závislost chyby na rozložení hodnot. Proto je možné, že pro jen mírně odlišná data by dosáhly lepších hodnot jiné váhové matice. Pro zkušební data dosáhla nejmenší střední chyby matice vlevo dole, která dává prostřední matici čtyřnásobnou váhu a odstraňuje vliv nejvzdálenějších bodů v rozích. Z hlediska maximální chyby a rozsahu hodnot je vhodnější matice vpravo nahoře, udělující prostřednímu členu čtyřnásobnou váhu a okolním osmi bodům váhu dvojnásobnou. Jelikož vážené filtrování nemá na výsledek nijak zásadní vliv a jeho výsledky jsou velmi podobné jako u filtrování neváženého, budou podrobnější výsledky vynechány.

Matice vah	s [E]	δ [%]	MAX [E]	Min. hodnota [E]	Max. hodnota [E]	Matice vah
$\frac{1}{49} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	3,39	82	27,93	-15,49	15,38	$\frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	3,53	86	24,70	-18,56	19,75	
$\frac{1}{52} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	3,26	79	26,67	-16,26	16,85	$\frac{1}{50} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	3,31	81	27,49	-15,75	15,89	
$\frac{1}{56} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	3,46	84	25,21	-17,93	19,04	$\frac{1}{56} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
	3,37	82	25,48	-17,58	18,51	
$\frac{1}{48} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	3,18	77	25,03	-18,34	17,91	$\frac{1}{44} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3,24	79	26,74	-17,01	15,41	

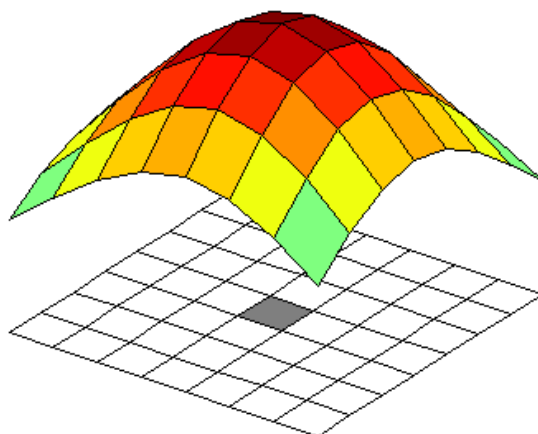
Tab. 7 - 5 Tabulka výsledků váženého průměrování

### 7.2.3 Gaussova filtrace v prostorové reprezentaci dat

Gaussova filtrace je vlastně vážené průměrování, přičemž váhy jednotlivých bodů v okolí jsou dány Gaussovou dvourozměrnou funkcí (Nixon a Aguado, 2002)

$$f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\sigma^2}}, \quad (7-4)$$

kde  $x$  a  $y$  jsou prostorové souřadnice v obrazu (v našem případě jde tedy o  $\phi$  a  $\lambda$ ) a  $\sigma^2$  je rozptyl Gaussovy funkce (v úhlových minutách). Body ve vybraném okolí mají tedy snižující se váhy se vzdáleností od prostředního (určovaného) bodu (obr. 7-12).



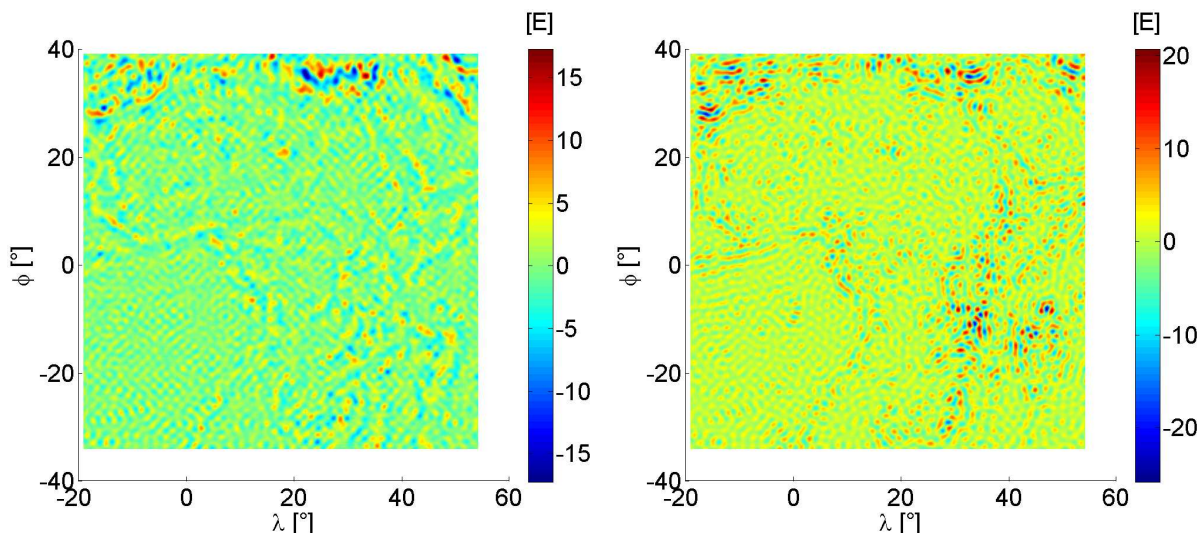
Obr. 7-12 Váhová funkce nad okolím 7x7 bodů se směrodatnou odchylkou 75'

Při tomto způsobu filtrace jsou tedy voleny dva parametry – směrodatná odchylka (případně rozptyl) Gaussovy funkce a velikost uvažovaného okolí výpočetního bodu.

počet bodů okolí	25	49	81
směrodatná odchylka			
30	7,77	6,42	6,21
45	6,27	3,84	3,37
60	5,73	3,28	3,28
75	5,49	3,20	3,55
90	5,36	3,21	3,76
105	5,29	3,24	3,90
120	5,24	3,27	4,00
135	5,20	3,29	4,07
150	5,18	3,30	4,11

Tab. 7 - 6 Tabulka výsledků Gaussovy filtrace (hodnoty střední chyby [E])

Gaussovou filtrací lze tedy z hlediska střední chyby dosáhnout stejně dobrých výsledků jako dolnopropustnou spektrální filtrací, nicméně za cenu mnohem menšího (a tudíž horšího) rozsahu výsledných hodnot (malý rozsah hodnot je vidět na obr. 7-13).



Obr. 7-13 Výsledky Gaussovy filtrace pro okolí 49 bodů a směrodatnou odchylku 75': a) výsledek filtrace, b) rozdíly oproti referenčním hodnotám

### 7.3 Porovnání výsledků jednotlivých metod filtrace

Pokud výsledky jednotlivých metod filtrace zobrazíme do jedné tabulky, můžeme je vzájemně porovnat. Každá z uvedených metod má jeden nebo dva volitelné parametry (např.: frekvenční propust či počet bodů průměrovaného okolí). V tabulce 7-7 je od každé použité metody uvedena varianta, která dosáhla nejmenší střední chyby. Dále je v tabulce pro každou z filtračních metod uvedena maximální chyba a rozsah dat po filtraci, které mohou sloužit k posouzení rozdílů mezi metodami s podobnou střední chybou. (Připomeňme, že referenční hodnoty z modelu mají rozsah cca od -31,0 E do 35,3 E.)

	s [E]	MAX [E]	minimální hodnota [E]	maximální hodnota [E]
Dolnoproputná filtrace s propustí pro stupně $l < 170$	3,20	24,94	-20,92	25,45
Gaussova spektrální filtrace, $\sigma = 140$	3,32	27,13	-15,57	13,50
Obyčejné průměrování přes okolí o velikosti 49 bodů	3,39	27,93	-15,49	15,38
Vážené průměrování (viz 7. řádek Tab. 7-5)	3,18	25,03	-18,34	17,91
Gaussova filtr. průměrováním, $\sigma = 75'$ a okolí 49 bodů	3,20	25,87	-17,26	17,24

Tab. 7 - 7 Porovnání metod filtrace

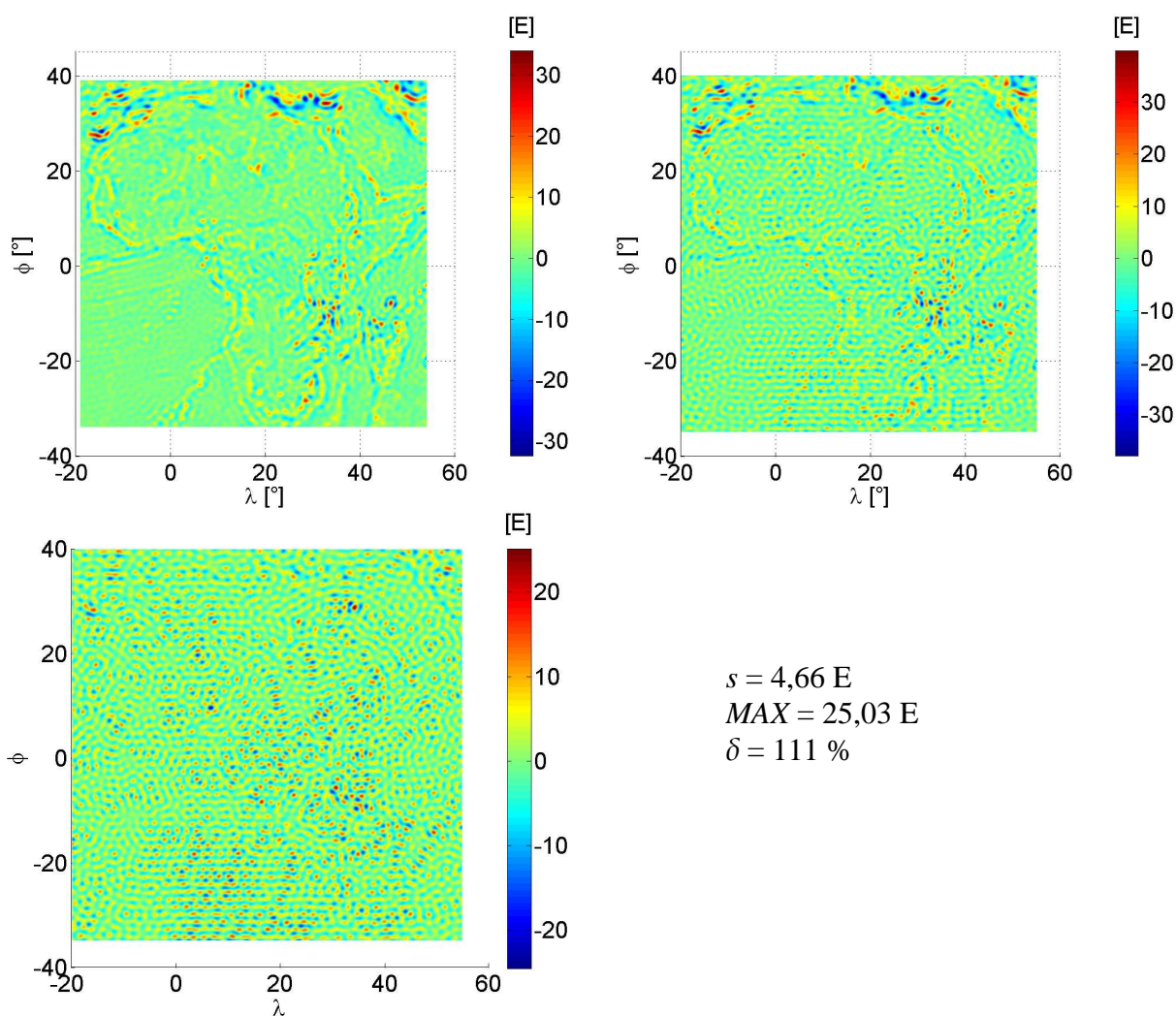


Z tabulky se zdá, že dolnoproustná filtrace by mohla být nejúčinnější metodou filtrace gradiometrických dat ze všech testovaných metod filtrace dat. Prozatím však zůstává otázkou, zda a jakým způsobem se oproti těmto výsledkům změny výsledky jednotlivých metod po jejich použití na reálná gradiometrická data družice GOCE.

## 8 Aplikace testovaných metod na reálná GOCE data

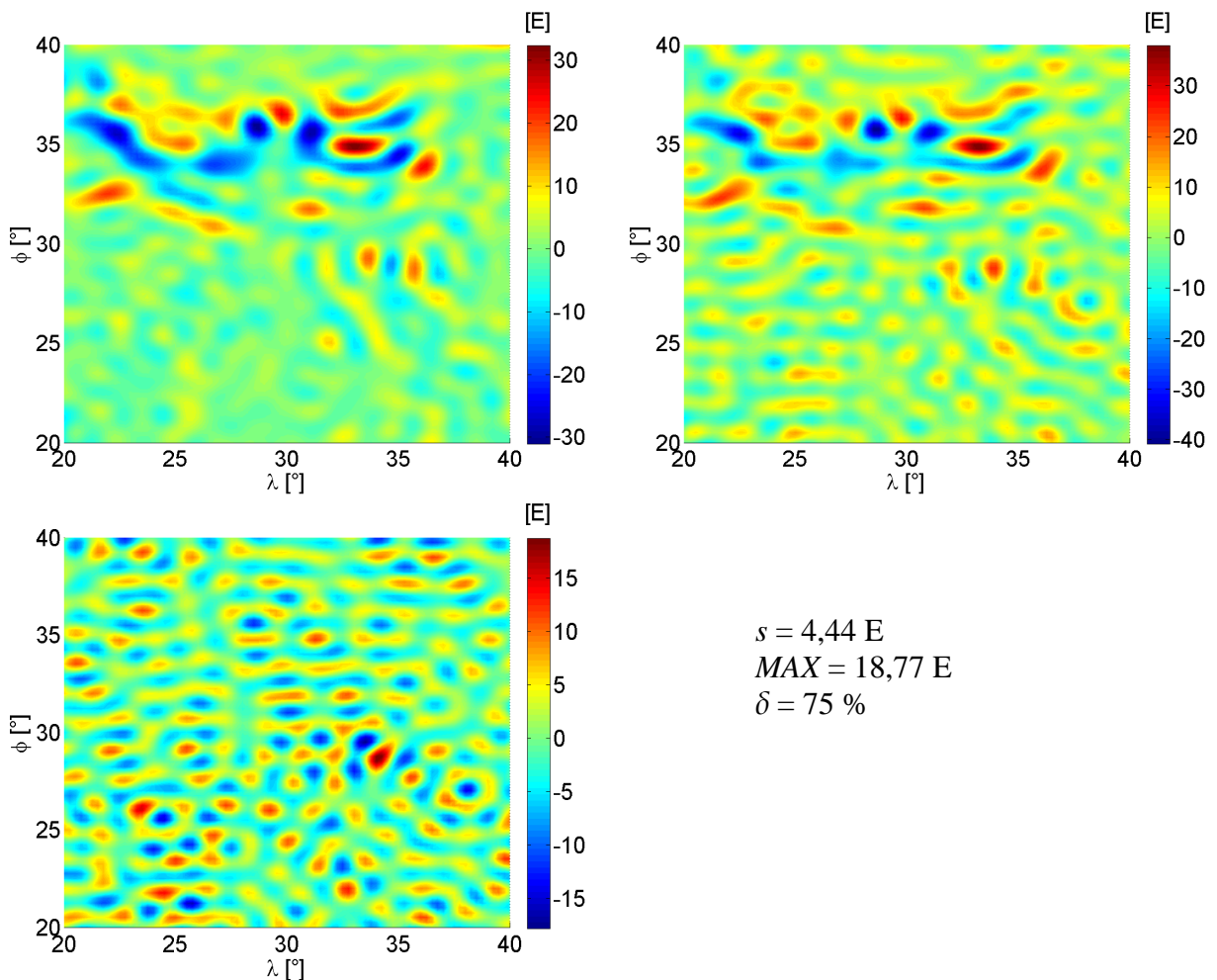
V kapitole 6 byla popsána problematika prodlužování syntetických gradiometických dat simulujících skutečná data. Prodloužená data však byla zatížena vysokou hladinou šumu. V kapitole 7 byly na táž data po prodloužení aplikovány metody filtrace, jimiž se podařilo míru šumu snížit. Analogické postupy budou v této kapitole aplikovány na reálná GOCE data. Jedná se o data druhých radiálních derivací poruchového potenciálu  $T_{rr}$  ( $T_{zz}$ ). Výsledky metod budou opět porovnávány s referenčními daty z geopotenciálního modelu EGM2008.

### 8.1 Prodlužování reálných GOCE dat



Obr. 8-1 Prodlužování 15-ti minutového rastru gradientu  $T_{zz}$  reálných dat na oblasti A: a) (vlevo nahoře) prodloužená data, b) (vpravo nahoře) referenční data, c) (dole) rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

Po prodloužení skutečných gradiometrických dat vidíme, že výsledná míra šumu je výrazně nižší, než tomu bylo u testovacích dat (viz kapitola 6). Hladina a charakter šumu přidaného do testovacích dat byly stanoveny podle hladiny a charakteru šumu ve skutečných datech, jednalo se ovšem o předběžná, časově limitovaná data (z přibližně dvouměsíčního období měření). V době psaní této kapitoly již byla k dispozici data novější, která díky delší době měření (cca 2,5 roku) a zlepšenému předzpracování dosahují lepší kvality. Na obr. 8-1 jsou výsledky prodlužování pro oblast A (viz obr. 6-1), na obr. 8-2 jsou výsledky prodlužování pro oblast B. Na oblasti A je relativní chyba 111 %, zatímco u testovacích dat chyba dosahovala 415 %. Na oblasti B je relativní chyba dokonce 75 %, tedy méně než jedna, což je způsobené tím, že samotná data zde dosahují vyšších absolutních hodnot, zatímco hodnoty šumu jsou přibližně stejné jako jinde.



Obr. 8-2 Prodlužování 15-ti minutového rastru reálných dat na oblasti B a) (vlevo nahoře) Prodloužená data b) (vpravo nahoře) Referenční data c) (dole) Rozdíl mezi prodlouženými a referenčními daty

Jelikož oblast A obsahuje větší vzorek dat, lze na ní lépe porovnat velikost šumu ve výsledném signálu po prodloužení, viz *obr. 8-1c*. Vidíme, že šum dokonce mírně převažuje nad samotnými daty. Přesto jsou data v prodlouženém signálu vizuálně rozpoznatelná. Na oblasti A budeme nadále pokračovat filtrací prodloužených reálných dat.

## 8.2 Filtrace prodloužených reálných GOCE dat

Filtrace na prodloužených reálných GOCE datech bude provedena metodami dolnoproustní filtrace, filtrace průměrováním a Gaussovou filtrací průměrováním. Tyto metody jsou vybrány proto, že jejich výsledky dopadly nejlépe při testování filtrace na syntetických datech (viz kapitola 7.3). Při testování dosáhla velmi kvalitních výsledků i filtrace váženým průměrováním, ale na reálných datech v nejlepším případě dosáhla kvality výsledků obyčejného průměrování, a proto zde nebudou její výsledky podrobněji uváděny.

### 8.2.1 Dolnoproustná filtrace

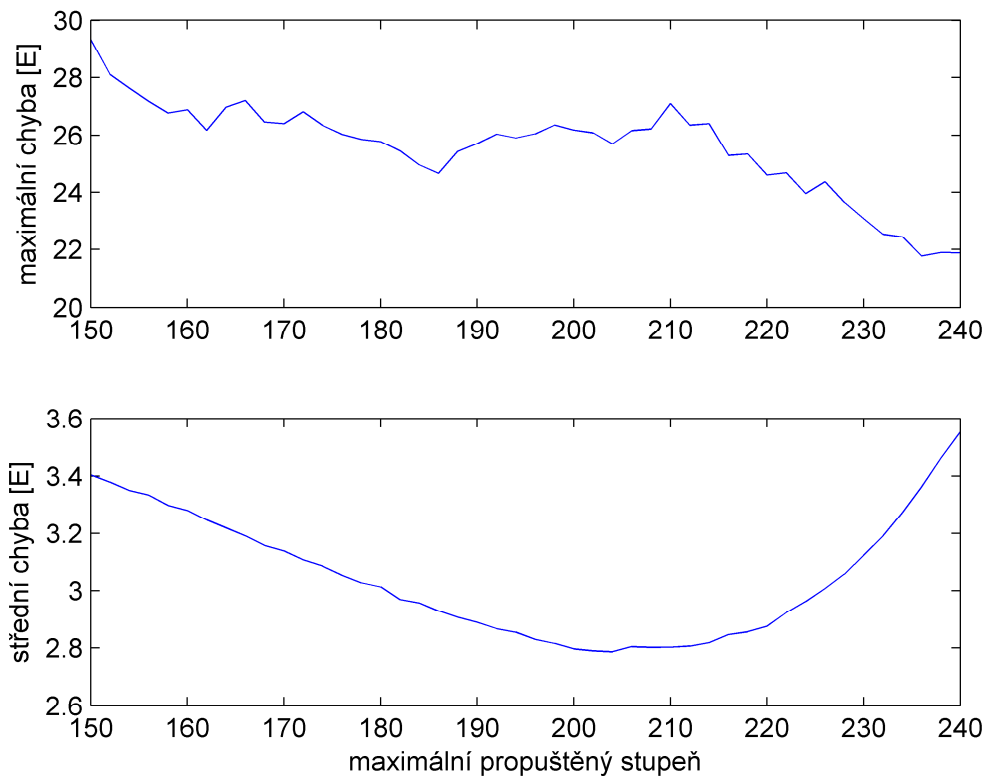
Dolnoproustná filtrace se nejlépe osvědčila při testování na syntetických datech. Nyní byla použita také na reálná gradiometrická data měřená družicí GOCE. V *tab. 8-1* jsou sepsány výsledky dolnoproustné filtrace pro prodloužená reálná GOCE data. Výsledky jsou na první pohled rozdílné od výsledků, kterých dosáhla filtrace na simulovaných datech. Zatímco na simulovaných datech byla určena ideální hodnota propusti z hlediska střední chyby asi na stupeň 170, zde je to 200 či 210.

Horní hranice frekvencí	s [E]	MAX chyba [E]	Min. hodnota [E]	Max. hodnota [E]
150	3,40	29,33	-21,19	20,43
160	3,28	26,89	-23,91	20,62
170	3,14	26,40	-24,57	21,78
180	3,01	25,78	-27,78	22,37
190	2,89	25,71	-29,07	24,16
200	2,80	26,18	-30,69	26,38
210	2,80	27,10	-33,14	29,65
220	2,88	24,61	-34,06	32,43
230	3,12	23,08	-37,09	34,10
240	3,55	21,88	-38,30	35,25

Tab. 8 - 1 Tabulka výsledků dolnoproustné filtrace

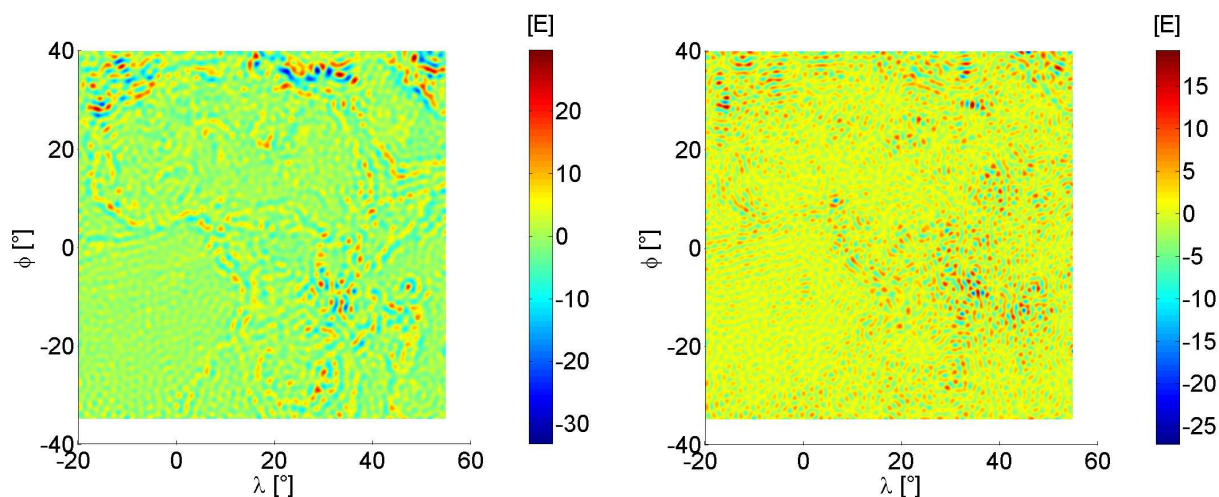
To je pozitivní změna především proto, že nám pro optimální výsledek stačí ze signálu oříznout menší množství frekvencí. Tak bude oříznuto méně frekvencí i ze spektra samotných dat, a proto není tak výrazné snížení rozsahu hodnot oproti rozsahu hodnot referenčních.

Na obr. 8-3 je ještě znázorněna závislost střední i maximální chyby na hodnotě propusti. Zvláštní trend můžeme pozorovat především u maximální chyby, která dosahuje lokálního maxima právě v místě, kde je střední chyba minimální. Tento jev nelze snadno interpretovat a je možné, že by se např. pro jiný výběr prodlužované a posléze filtrované oblasti nevyskytl.



Obr. 8-3 Chyby dolnoproustné filtrace: a) Závislost maximální chyby na maximálním propuštěném stupni, b) Závislost střední chyby na maximálním propuštěném stupni

Na obr. 8-4 je ještě zobrazen výsledek filtrace a příslušné odchylky oproti referenčním datům pro optimální hodnotu propusti odpovídající stupni 210.



$$s = 2,80 \text{ E}, \text{ MAX} = 27,10 \text{ E}, \delta = 67 \%$$

Obr. 8-4 Dolnoproústná filtrace s propustí do stupně 210 na reálných GOCE datech: a) Výsledek filtrace, b) Odchylky od referenčních dat

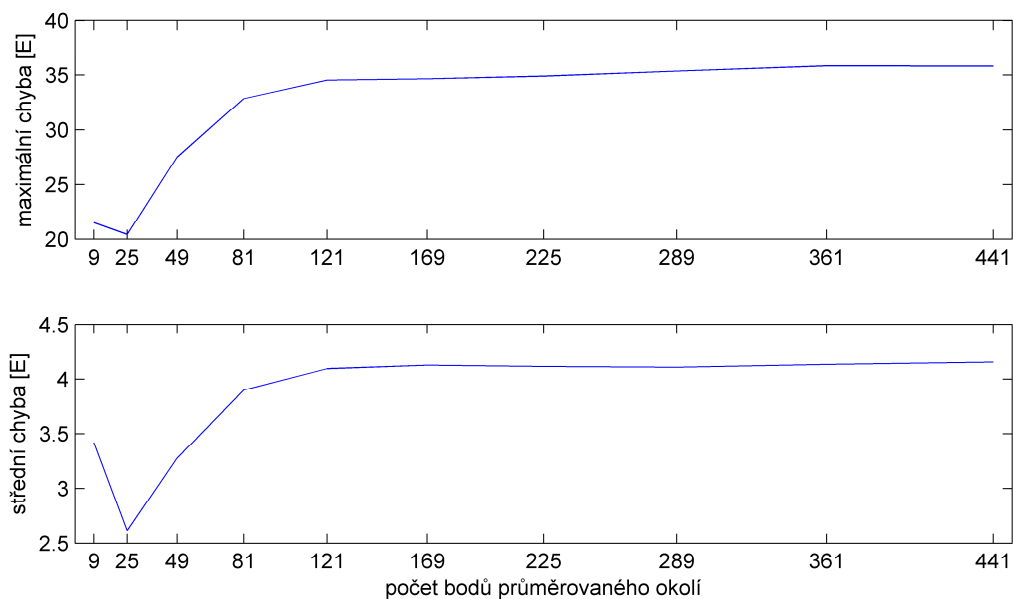
### 8.2.2 Filtrace průměrováním

Tabulka 8-2 zobrazuje výsledky obyčejné filtrace průměrováním. Výsledky se také liší od výsledků testování filtrace pomocí syntetických dat v kapitole 7. Zatímco u testovacích dat dosáhlo nejlepších výsledků průměrování přes oblast 49 bodů, nyní to je oblast 25 bodů.

Počet bodů okolí	s [E]	MAX chyba [E]	Min. hodnota [E]	Max. hodnota [E]
9	3,42	21,51	-31,73	31,81
25	2,61	20,43	-22,19	20,83
49	3,28	27,52	-16,85	12,47
81	3,90	32,86	-12,86	9,91
121	4,09	34,54	-10,88	8,55
169	4,13	34,65	-8,50	6,59
225	4,11	34,91	-7,09	5,80
289	4,11	35,36	-6,22	5,22
361	4,13	35,84	-4,80	4,57
441	4,15	35,82	-4,24	3,69

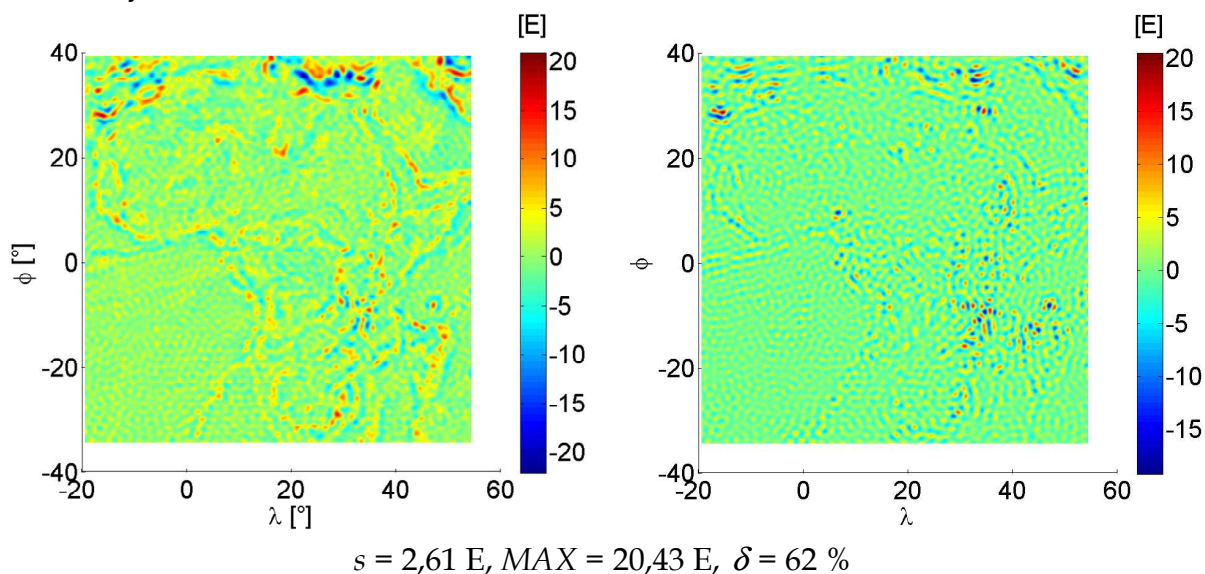
Tab. 8 - 2 Tabulka výsledků filtrace průměrováním

Na obr. 8-5 vidíme, že průběh chyb v závislosti na počtu bodů je na rozdíl od dolnoproústné filtrace analogický pro střední i maximální chybu a počínaje optimální hodnotou 25 bodů jsou obě chyby čistě rostoucí.



Obr. 8-5 Chyby dolnoproústné filtrace: a) Závislost maximální chyby na maximálním propuštěném stupni, b) Závislost střední chyby na maximálním propuštěném stupni

Výsledek filtrace i její odchylky pro optimální hodnotu 25 bodů jsou ještě zobrazeny na obr 8-6.



Obr. 8-6 Filtrace průměrováním přes okolí 25 bodů na reálných GOCE datech: a) Výsledek filtrace, b) Odchylky od referenčních dat

### 8.2.3 Gaussova filtrace průměrováním

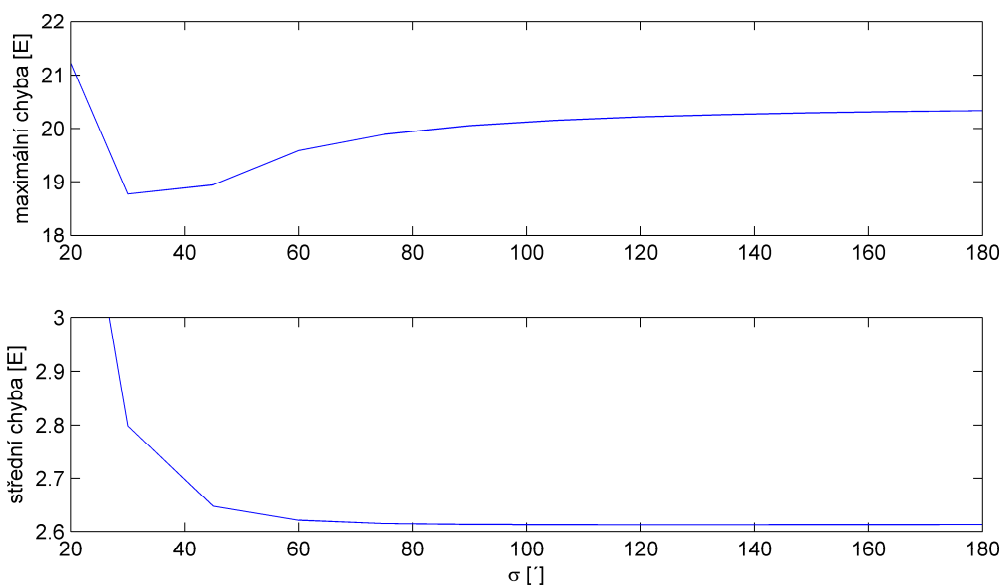
U testování filtračních metod na syntetických datech dopadla Gaussova filtrace vzhledem k velikosti střední chyby stejně dobře jako dolnoproústná filtrace, nicméně dosáhla výrazně horšího rozsahu dat po filtraci. Podobné chování můžeme

pozorovat i v Tab. 8-3 u filtrace reálných GOCE dat. Výsledky jsou zde uvedeny pouze pro průměrování přes 25 bodů, protože tato velikost okolí vyšla výrazně nejlépe u obyčejného průměrování. Mění se tedy pouze směrodatná odchylka (odmocnina z rozptylu) Gaussovy funkce. Střední chyba je zde dokonce o trochu menší než u dolnoproputné filtrace. Výsledky pro optimální nastavení směrodatné odchylky jsou velmi podobné jako u obyčejného průměrování přes okolí 25 bodů.

Směrodatná odchylka $\sigma$ [']	s [E]	MAX chyba [E]	Min. hodnota [E]	Max. hodnota [E]
15	3,73	22,46	-33,34	33,95
30	2,80	18,77	-26,55	25,43
45	2,65	18,94	-24,15	22,79
60	2,62	19,59	-23,25	21,95
75	2,62	19,89	-22,82	21,55
90	2,61	20,06	-22,59	21,33
105	2,61	20,15	-22,45	21,20
120	2,61	20,22	-22,36	21,11
135	2,61	20,26	-22,31	21,06
150	2,61	20,29	-22,29	21,01
165	2,61	20,32	-22,27	20,98
180	2,61	20,34	-22,26	20,96

Tab. 8 - 3 Výsledky filtrace pomocí Gaussovy filtrace

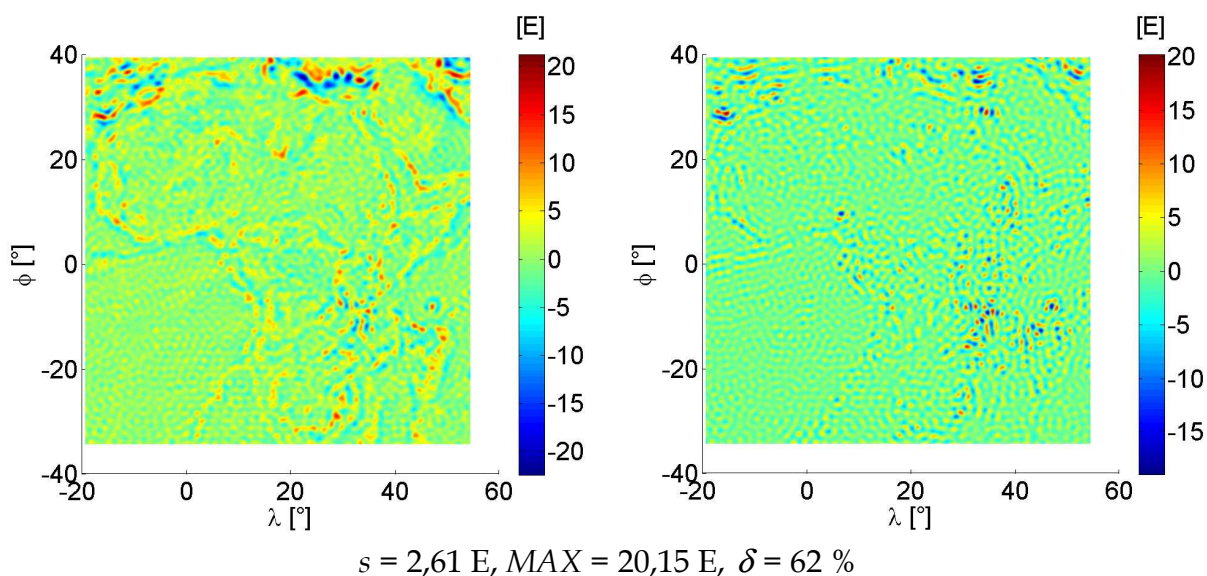
Z obr. 8-7 vidíme, že zatímco střední chyba dosahuje přibližně nejnižší hodnoty okolo hodnoty  $\sigma = 75'$  a dále zůstává téměř konstantní, maximální chyba má svoje lokální minimum pro  $\sigma = 30'$ .



Obr. 8-7 Chyby Gaussovy filtrace průměrováním: a) Závislost maximální chyby na maximálním propuštěném stupni, b) Závislost střední chyby na maximálním propuštěném stupni



Na obrázku 8-8 jsou ještě znázorněny výsledky filtrace a odchylky pro variantu s nejmenší střední chybou.



Obr. 8-8 Filtrace Gaussovským průměrováním přes okolí 25 bodů se směrodatnou odchylkou  $\sigma = 75'$  na reálných GOCE datech: a) Výsledek filtrace, b) Odchylky od referenčních dat

### 8.3 Vyhodnocení výsledků práce s reálnými GOCE daty

Prodloužená reálná gradiometrická data dosáhla na oblasti A relativní chyby 111 % vzhledem k referenčním datům. Míra šumu v nich tedy přesahuje míru samotných dat (její odhad podle EGM2008). Přesto jsou však ve výsledcích vizuálně patrná místa s extrémními hodnotami měřených dat.

Filtrací se relativní hodnotu šumu podařilo snížit na hodnotu 62 %. To stále není zcela ideální hodnota, ale hladina šumu již není vyšší než samotná data, a i z vizuálního zhodnocení je patrné, že odfiltrování alespoň části šumu bylo úspěšné a data se přiblížila datům referenčním. Nejde ovšem jednoznačně stanovit, jakou metodu filtrace je nejvhodnější použít. Zatímco filtrace průměrováním dosáhly nejmenších hodnot střední chyby, dolnopropustná filtrace ve frekvenční reprezentaci dat má střední chybu jen o něco málo větší a zároveň lépe zachovává rozsah dat.

Při práci s reálnými GOCE daty je podstatné, že EGM2008, z něhož jsou syntézou počítána referenční gradiometrická data, samozřejmě nereprezentuje přesně skutečné gravitační pole Země. EGM2008 je výsledkem kombinace dat různých metod gravimetrických měření před družicovou misí GOCE a právě data z družicové mise GOCE by měla napomoci vytvoření nových a přesnějších modelů gravitačního pole Země. U veškerých rozdílů mezi daty vypočtenými z družicových

měření a daty z modelu je tedy třeba mít na paměti, že se nemusí automaticky jednat o chybu měření, případně výpočtu, ale může se také jednat o rozdíl způsobený nepřesností EGM2008 oproti skutečnému gravitačnímu poli.

## 9 Závěr

Cílem předložené diplomové práce bylo uceleně popsat problematiku prodlužování gradiometrických dat družicové mise GOCE. Úvodní kapitoly byly věnovány nutným matematickým i fyzikálním základům pro popis tíhového pole Země v geodézii a přehledu metod sběru gravimetrických a gradiometrických dat, včetně kapitoly věnované samotné družicové misi GOCE a charakteru dat, která měří. Poznatky z úvodních kapitol byly poté zohledněny při výběru vhodné metody prodlužování gradiometrických dat.

Na testovacích datech bylo ověřeno, že prodlužování gradiometrických dat směrem dolů je numericky velmi nestabilní proces. Nárůst šumu má exponenciální trend vzhledem ke vzdálenosti, o kterou je prodloužováno. Prodloužená data jsou poté zcela ztracena v šumu a výsledek prodloužení tedy potřebuje další zpracování. Výrazné zlepšení kvality prodloužených dat nabízí metody filtrace. Bylo zjištěno, že z testovaných metod je nejvhodnější metoda dolnopropustné filtrace ve spektrální reprezentaci dat.

Testované metody byly poté aplikovány na reálná gradiometrická data měřená družicí GOCE. Data měřená družicí GOCE se ukázala být zatížena šumem méně, než se předpokládalo při tvorbě vhodných testovacích dat. Kvalitu výsledků jak prodloužení, tak následné filtrace reálných dat je tedy výrazně lepší, než tomu bylo u testovacích dat. U všech použitých metod filtrace bylo navíc nutno pro dosažení co nejlepších výsledků zvolit jiné parametry, než s jakými bylo dosaženo optimálních výsledků při testování. Výsledná míra šumu je po filtraci výrazně snížena, což je patrné jak z použitých charakteristik přesnosti, tak z vizuálního posouzení dat.

Přesto však výsledná přesnost prodloužených gradiometrických dat není dostačující. Zde je ale nutné připomenout, že problém prodlužování gradiometrických dat na vzdálenost v řádech stovek kilometrů zatím nebyl nikým uspokojivě vyřešen, a proto vyžaduje další zkoumání. Jednou z možných cest k přesnějším výsledkům prodlužování může být hledání nových matematických postupů pro řešení tohoto problému.

## Použitá literatura

- ALBERTS, Bas. *Regional Gravity Field Modeling Using Airborne Gravimetry Data*. Nederlandse Commissie voor Geodesie, 2009. 179 s. ISBN 9789061323129
- DRÁBEK, Pavel a HOLUBOVÁ, Gabriela. *Parciální diferenciální rovnice: úvod do klasické teorie*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. 177 s. ISBN 80-7082-766-1.
- DRÁBEK, Pavel a MÍKA, Stanislav. *Matematická analýza. II*. 1. vyd. Plzeň: ZČU, 1996. 268 s. ISBN 80-7082-245-7.
- GFZ Potsdam. *The CHAMP Mission*. Dostupné na: <<http://op.gfz-potsdam.de/champ>>
- GRUBER, Thomas, RUMMEL, Reiner, ABRIKOSOV, Oleg a HEES, Richard Van. *GOCE Level 2 Product Data Handbook*. 2010. The European GOCE Gravity Consortium.
- HADAMARD, Jacques. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Princeton University Bulletin, 1902. str. 49–52.
- HAMHALTER, Jan a TIŠER, Jaroslav. *Integrální počet funkcí více proměnných*. Vyd. 2. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2006. 201 s. ISBN 80-01-03357-0.
- HEISKANEN, Weikko Aleksanteri a MORITZ, Helmut. *Physical Geodesy*. San Francisco : W.H. Freeman & Co., 1967.
- HOFMANN-WELLENHOF, Bernhard a MORITZ, Helmut. *Physical geodesy*. 1st ed. Wien: Springer, ©2005. XVII, 403 s. ISBN 3-211-23584-1.
- HUANG, Jianliang, 2002. *Computational methods for the discrete downward continuation of the Earth gravity and effects of lateral topographical mass density variation on gravity and the geoid*. Technical Report 216, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick, Fredericton, New Brunswick, Canada, 141 s.
- ICGEM, *Global Gravity Field Models* [online]. Dostupné na: <<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/>>
- KELLER, Wolfgang a HIRSCH, Milo. *A boundary value approach to downward continuation*. Manuscripta Geodaetica, 1994. 19: 101-118
- MUDROVÁ, Martina. *Fourierova transformace ve zpracování obrazů* [online]. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. 2004. Dostupné na: <[uprt.vscht.cz/ucebnice/zob/prednasky/06-FOURIER/fouriercz.pdf](http://uprt.vscht.cz/ucebnice/zob/prednasky/06-FOURIER/fouriercz.pdf)>

- MURRAY Alice S. a TRACEY Ray M. *Best Practices in Gravity Surveying* [online]. 2001. Australian Geological Survey Organisation. Dostupné na: <[www.ga.gov.au/image\\_cache/GA2236.pdf](http://www.ga.gov.au/image_cache/GA2236.pdf)>
- NÁDENÍK, Zbyněk. *Kulové funkce pro geodézii: matematická příprava ke studiu knihy W.A. Heiskanen - H. Moritz: Physical geodesy, 1967*. Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, 2000. 129 s. ISBN 80-85881-15-2
- NEWTON, Isaac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London, 1687. Přeložil Andrew Motte. 1729.
- NIXON, Mark S. a AGUADO, Alberto S. *Feature Extraction and Image Processing*. Newnes, 2002. s. 350. ISBN 9780080506258.
- NOVÁK, Pavel. *Úvod do tíhového pole Země. Přednáškové texty k předmětu KMA/MFG* [online]. Západočeská univerzita, Plzeň. 2003. Dostupné na: <<http://gis.zcu.cz/?page=gev>>
- PAIL, Roland. *Local gravity field continuation for the purpose of in-orbit calibration of GOCE SGG observations*. Advances in Geosciences, 2003. 1: 11-18
- PAVLIS, Nikolaos K., HOLMES, Simon A., KENYON, Steve C. a FACTOR, John K. *The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)*. Journal of Geophysical Research, 2002., 117, B04406, doi:10.1029/2011JB008916.
- REIGBER, Christoph, SCHMIDT, Roland, FLECHTNER, Frank, KÖNIG, Rolf, MEYER, Ulrich, NEUMAYER, Karl-Hans, SCHWINTZER, Peter a ZHU, Sheng Yuan. *An Earth gravity field model complete to degree and order 150 from GRACE: EIGEN-GRACE02S*. Journal of Geodynamics. 2004.
- SAMPIETRO, Daniele. *GOCE exploitation for moho modeling and applications*. Proc. of the 4th International GOCE User Workshop, 2011. Munich, Germany.
- SÜNKEL, Hans a kol. *From Eotvoes to milliGal*. 2000. ESA/ESTEC Contract No13392/98/GD/NL.
- ŠONKA, Milan, HLAVÁČ, Václav a BOYLE, Roger: *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. Nelson Education Limited, 2008. 829 s. ISBN 9780495082521
- ŠPRLÁK, Michal, GERLACH, Christian. a PETTERSEN, Björn R. *Evaluation of Residuals Between GOCE Global Gravity Field Models and GOCE Gravity Gradient Observations*. 2012. Poster presented at the International Association of Geodesy Symposium: Gravity, Geoid and Height Systems, October 9-12, Venice, Italy.
- The University of Texas at Austin. *GRACE, Gravity Recovery and Climate Experiment*. Dostupné na: <<http://www.csr.utexas.edu/grace/>>

- TOMICZEK, Petr. *Matematická analýza 3* [online]. 2005-02-03. Dostupné na: <<http://home.zcu.cz/~tomiczek/Karty.htm>>
- TORGE, Wolfgang. *Gravimetry*. Walter de Gruyter 1989. 465 s. ISBN 9783110107029
- TÓTH, Gula, FÖLDVÁRY, Lóránt, TZIAVOS, Ilias N. a ÁDAM, József. *Upward/downward continuation of gravity gradients for precise geoid determination*. Physical Geodesy and Geodynamics Research Group of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest University of Technology and Economics, 2006.
- Towards a better understanding of the Earth's interior and geophysical exploration research [online]. Dostupné na: <<http://goce.kma.zcu.cz>>
- VANÍČEK, Petr a KRAKIWSKY, Edward J. *Geodety, the concepts*. North-Holland Pub. Co., 1982. 691 s. ISBN 0444861491.

## Přílohy

- **Příloha A:** **Struktura přiloženého CD**
- **Příloha B:** **Zdrojový kód v Matlabu pro výpočet integračního jádra pro prodlužování** (*vypocetJadraSpektralne.m*)
- **Příloha C:** **Zdrojový kód v Matlabu pro výpočet integrace vypočteného jádra** (*integrace.m*)
- **Příloha D:** **Zdrojový kód v Matlabu použitý pro dolnoproputnou filtraci ve Fourierově transformaci** (*FFTpropust.m*)
- **Příloha E:** **Zdrojový kód v Matlabu použitý pro Gaussovu filtraci ve Fourierově transformaci** (*FFTGauss.m*)
- **Příloha F:** **Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci obyčejným průměrováním** (*prumerovani.m*)
- **Příloha G:** **Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci váženým průměrováním** (*prumerovaniVahy.m*)
- **Příloha H:** **Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci gaussovským průměrováním** (*prumerovaniGauss.m*)

Ze zdrojových kódů jsou z důvodu délky vynechány části zajišťující vykreslení výsledných dat a některé další doplňkové operace. Kódy v plné délce jsou dostupné na CD přiloženém k práci.

## **Příloha A: Struktura přiloženého CD**

- *Obrazky* (obsahuje více obrázků s výsledky filtrací, než je v samotné práci)
  - *FFT\_propust*
  - *FFT\_Gauss*
  - *Prumerovani*
  - *Prumerovani\_vazene*
  - *Prumerovani\_Gauss*
  
- *Zdrojove\_kody* (obsahuje použité zdrojové kódy)
  
- *Hamackova\_DP.pdf*



## Příloha B: Zdrojový kód v Matlabu pro výpočet integračního jádra pro prodlužování (vypocetJadraSpektralne.m)

```
%% počítá integrační jádro pro prodlužování a ukládá ho počástech (kvůli velikosti) do *.mat souborů pro případné opakované použití

clc;
clear all;
close all;

% minDelka, minSirka, max Delka, maxSirka
%tato verze programu je pouze pro integraci přes celou kouli
integracniOblast=[0,-90,359.75,90];
prodluzovanaOblast = [20,20,40,40];

hodnoty=textread('tzz_30min_nahore.txt');
zahlavi=hodnoty(1,:);

krok = zahlavi(6)/3600;
krokVysledny = 0.5;
posun=krokVysledny/krok;

i=0;
j=0;

prvniMatice=zeros(181,360);

% cyklus přes prodlužovanou oblast
for latP=prodluzovanaOblast(4):-krokVysledny:prodluzovanaOblast(2)
    i=i+1;
    k=0;
    for longP=prodluzovanaOblast(1):krokVysledny:prodluzovanaOblast(3)
        latP
        longP

        j=j+1;
        k=k+1;
        % pro první bod v řádce bude spočtena matice
        if longP==prodluzovanaOblast(1)

            m=0;
            for latI=integracniOblast(2):krok:integracniOblast(4)
                m=m+1;
                n=0;
                for longI=integracniOblast(1):krok:integracniOblast(3)
                    n=n+1;

                    %sfericka vzdalenost
                    cosFi=sin(latP*pi/180)*sin(latI*pi/180)+cos(latP*pi/180)*cos(latI*pi/180)*
                    cos(abs(longI*pi/180-longP*pi/180));

                    % vypocet hodnot legenderovych polynomu
                    legen=zeros(251,1);
                    legen(1)=cosFi;
                    legen(2)=(3/2)*cosFi^2-1/2;

                    for stupen=3:1:251
```

```

legen(stupen)=- (stupen-1)/stupen*legen(stupen-2)+(2*stupen-1)/stupen*
cosFi*legen(stupen-1);

end

hodnota=0;

%soucet rady
for p=2:1:250
% velikost integr. cturuhelniku, (2p+1), amplif. faktor, legen. polynomv
hodnota=hodnota+cos(latI*pi/180)*(krok*pi/180)^2*(6637618.5^2)*(2*p+1)*
(6637618.5/6378136.3)^(p+3)*legen(p);

end

prvniMatice(m,n)=hodnota;
maticeVzdal(m,n)=cosFi;

end
end

matice=prvniMatice;

else

% pro dalsi body radky uz jenom posun matice
matice=[prvniMatice(:,end-posun*(k-1)+1:end),prvniMatice(:,1:end-posun*
(k-1))];

end

K=reshape(matice',1,size(matice,1)*size(matice,2));

%složka, kam budou ukládány soubory obsahující vypočtené jádro
save(sprintf('skladMatic/A%d.mat', j),'K');
clear K;

end
end

```

## Příloha C: Zdrojový kód v Matlabu pro výpočet integrace vypočteného jádra (integrace.m)

```
%% integrace s jádrem vypočteným programem "vypocetJadraSpektralne",
% porovnání hodnot s referenčními a vykreslení

clc;
clear all;
close all;

%rozměry výsledné matice
radky=41;
sloupce=41;
krok=0.5;

% soubor prodlužovaných dat a referenční soubor
soubor='tzz_30min_nahore.txt';
souborRef='grd_dole_30min_orez2040.txt';
hodnoty=textread(soubor);
zahlati=hodnoty(1,:);
sirka=hodnoty(2:end,1);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,t);

vypoctene=zeros(radky*sloupce,1);
for i=1:1:radky*sloupce
    if mod(i,100)==0
        i
    end
    % složka, kam byla uložena data při výpočtu jádra
    load(sprintf('skladMatic/A%d.mat', i), 'K');
    % vypoctene(i)=1/(4*pi*6378136.3^2)*K*hodnota;
    vypoctene(i)=1/(4*pi*6637618.5^2)*K*hodnota;
end
```

## Příloha D: Zdrojový kód v Matlabu použitý pro dolnopropropustnou filtraci ve Fourierově transformaci (FFTpropust.m)

```
%% velikost matice
radky=300;
sloupce=300;

%% soubor k filtraci a referenční soubor
soubor='tzz_dole_15min.txt';
souborRef='grd2-250_dole_15min_ctverec.txt';

%% načtení a příprava hodnot
hodnoty=textread(soubor);
zahlaví=hodnoty(1,:);
sirka=hodnoty(2:end,1);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,4);

matice=reshape(hodnota,sloupce,radky);
[x,y]=meshgrid(-34.875:0.25:39.875,-19.875:0.25:54.875); %rozsah dat
[xF,yF]=meshgrid((-715.2:4.8:720)-2.4,(-715.2:4.8:720)-2.4); %rozsah spektra

hodnoty=textread(souborRef);
zahlavíRef=hodnoty(1,:);
[sirkaR,delkaR,vyskaR, hodnotaR]=textread(souborRef,'%f %f %f %f','headerlines',1);
hodnotaR=hodnotaR(:,1);
maticeRef=reshape(hodnotaR,sloupce,radky);

%% Fourierova transformace
f=fft2(matice);
f=fftshift(f);

n=0;
% cyklus pro vybrané hodnoty propustí
for rad=200 %zde nastavit hodnoty propustí, případně krok
n=n+1;
%% výpočet masky
k=zeros(sloupce,radky);
for i=1:radky
    for j=1:sloupce
        if ((yF(i,1))^2+(xF(1,j))^2)<rad^2
            k(j,i)=1;
        end
    end
end
end

%% přenásobení maskou
fk=f.*k;
%% zpětná transformace
fk=ifftshift(fk);
trans=ifft2(fk);

%% rozdíl a charakteristiky přesnosti
rozdil=real(fliplr(real(trans))-maticeRef);% pro data od max sirky do min sirky
m=max(abs(reshape(rozdil,1,[])));
r=rms(reshape(rozdil,1,[]));

chybaR(n)=r;
chybaM(n)=m;
minMag(n)=min((reshape(real(trans),1,[])));
maxMag(n)=max((reshape(real(trans),1,[])));
```

## Příloha E: Zdrojový kód v Matlabu použitý pro Gaussovu filtraci ve Fourierově transformaci (*FFTGauss.m*)

```
%% velikost matice
radky=300;
sloupce=300;

%% soubor k filtraci a referenční soubor
soubor='cwd_ctverec.txt';
souborRef='grd_050-250_ctverec.txt';

%% načtení a příprava hodnot
hodnoty=textread(soubor);
zahhlavi=hodnoty(1,:);
sirka=hodnoty(2:end,1);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,4);

matice=reshape(hodnota,sloupce,radky);
[x,y]=meshgrid(-34.875:0.25:39.875,-19.875:0.25:54.875);%rozsah dat
[xF,yF]=meshgrid((-715.2:4.8:720)-2.4,(-715.2:4.8:720)-2.4);%rozsah spektra

hodnoty=textread(souborRef);
zahhlaviRef=hodnoty(1,:);
[sirkaR,delkaR,vyskaR,hodnotaR]=textread(souborRef,'%f %f %f %f','headerlines',1);
hodnotaR=hodnotaR(:,1);
maticeRef=reshape(hodnotaR,sloupce,radky);

%% Fourierova transformace
f=fft2(matice);
f=fftshift(f);

n=0;
% cyklus pro vybrané hodnoty propustí
for rad=100:10:250 %zde nastavit hodnoty propustí, případně krok
n=n+1;
%% výpočet masky
k=zeros(sloupce,radky);
for i=1:radky
    for j=1:sloupce
        k(j,i)=exp(-((yF(i,1))^2+(xF(1,j))^2)/(rad^2)); % Gaussova funkce
    end
end

%% přenásobení maskou
fk=f.*k;

%% zpětná transformace
fk=ifftshift(fk);
trans=ifft2(fk);

%% rozdíl a charakteristiky přesnosti
rozdil=real(real(trans)-maticeRef);
m=max(abs(reshape(rozdil,1,[])));
r=rms(reshape(rozdil,1,[]));

chyba(n)=r;
chybaMax(n)=m;
minMag(n)=min(reshape(real(trans),1,[]));
maxMag(n)=max(reshape(real(trans),1,[]));
```

## Příloha F: Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci obyčejným průměrováním (prumerovani.m)

```
% velikost matice
radky=300;
sloupce=300;

% soubor k filtraci a referenční soubor
soubor='cwd_ctverec.txt';
souborRef='grd_050-250_ctverec.txt';

% načtení a příprava hodnot
hodnoty=textread(soubor);
zahlavi=hodnoty(1,:);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,4);

matice=reshape(hodnota,radky,sloupce);

hodnotyR=textread(souborRef);
zahlaviRef=hodnotyR(1,:);
[sirkaR, delkaR, vyskaR, hodnotaR]=textread(souborRef,'%f %f %f %f', 'headerlines',
1);
hodnotaR=hodnotaR(:,1);
maticeRef=reshape(hodnotaR,sloupce,radky);

% průměrování
n=0
vel=1:10%nastavení vel. okolí - vyjádřeno v počtu pixelů od prostředního bodu
    %na každou stranu od prostředního bodu. Tedy vel=2 odpovídá okolí 25 bodů,
    %vel=3 odpovídá okolí 49 bodů atd.
n=n+1
[xP,yP]=meshgrid(-19.875+vel*0.25:0.25:54.875-vel*0.25,34.875+vel*0.25:0.25:39.875-
vel*0.25);

prum=zeros(radky-vel*2,sloupce-vel*2);
for i=1+vel:radky-vel
    for j=1+vel:sloupce-vel
        okoli=matice(i-vel:i+vel,j-vel:j+vel);

prum(i-vel,j-vel)=mean(reshape(okoli,1,[]));

    end
end

% rozdíly a charakteristiky přesnosti
refOrez=maticeRef(vel+1:end-vel,vel+1:end-vel);
rozdil=((rot90(prum))-rot90(refOrez));%pro data od min šířky do max šířky,
    %jinak nutno upravit
m=max(abs(reshape(rozdil,1,[])));
r=rms(reshape(rozdil,1,[]));
chybaR(n)=r;
chybaM(n)=m;
minMag(n)=min((reshape(prum,1,[])));
maxMag(n)=max((reshape(prum,1,[])));
```

## Příloha G: Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci váženým průměrováním (*prumerovaniVahy.m*)

```
%% velikost matice
radky=300;
sloupce=300;

%% soubor k filtraci a referenční soubor
soubor='tzz_dole_15min.txt';
souborRef='grd2-250_dole_15min_ctverec.txt';

%% načtení a příprava hodnot
hodnoty=textread(soubor);
zahlaví=hodnoty(1,:);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,4);
hodnota=hodnota(:,1);
matice=reshape(hodnota,radky,sloupce);

hodnotyR=textread(souborRef);
zahlavíRef=hodnotyR(1,:);
[sirkaR,delkaR,vyskaR,hodnotaR]=textread(souborRef,'%f %f %f %f','headerlines',1);
hodnotaR=hodnotaR(:,1);
maticeRef=reshape(hodnotaR,sloupce,radky);

%% průměrování
n=0
vel=2 %nastavení velikost okolí - vyjádřeno v počtu pixelů od prostředního body
      %na každou stranu od prostředního bodu. Tedy vel=2 odpovídá okolí 25 bodů,
      %vel=3 odpovídá okolí 49 bodů atd.
n=n+1
[xP,yP]=meshgrid(-19.875+vel*0.25:0.25:54.875-vel*0.25,-
34.875+vel*0.25:0.25:39.875-vel*0.25);

prum=zeros(radky-vel*2,sloupce-vel*2);
for i=1+vel:radky-vel
    for j=1+vel:sloupce-vel
        okoli=matice(i-vel:i+vel,j-vel:j+vel);

matVah=[
    1 1 1 1 1
    1 1 1 1 1
    1 1 3 1 1
    1 1 1 1 1
    1 1 1 1 1
    ] ; % Matice vah

matPrenasobena=matVah.*okoli;
prum(i-vel,j-vel)=sum(reshape(matPrenasobena,1,[]))/sum(reshape(matVah,1,[]));

end
end

%% rozdíl a charakteristiky přesnosti
refOrez=maticeRef(vel+1:end-vel,vel+1:end-vel);
rozdil=rot90(fliplr(prum))-rot90(refOrez);
m=max(abs(reshape(rozdil,1,[])));
r=rms(reshape(rozdil,1,[]));
chybaR(n)=r;
chybaM(n)=m;
minMag(n)=min(reshape(prum,1,[]));
maxMag(n)=max(reshape(prum,1,[]));
```

## Příloha H: Zdrojový kód v Matlabu použitý pro filtraci gaussovským průměrováním (*prumerovaniGauss.m*)

```
%% velikost matice
radky=300;
sloupce=300;

%% soubor k filtraci a referenční soubor
soubor='cwd_ctverec.txt';
souborRef='grd_050-250_ctverec.txt';

%% načtení a příprava hodnot
hodnoty=textread(soubor);
zahlavi=hodnoty(1,:);
delka=hodnoty(2:end,2);
vyska=hodnoty(2:end,3);
hodnota=hodnoty(2:end,4);
matice=reshape(hodnota,radky,sloupce);

hodnotyR=textread(souborRef);
zahlaviRef=hodnotyR(1,:);
[sirkaR,delkaR,vyskaR,hodnotaR]=textread(souborRef,'%f %f %f %f','headerlines',1);
hodnotaR=hodnotyR(:,1);
maticeRef=reshape(hodnotaR,sloupce,radky);

%% průměrování
n=0
vel=3 %nastavení velikost okolí - vyjádřeno v počtu pixelů od prostředního body
      %na každou stranu od prostředního bodu. Tedy vel=2 odpovídá okolí 25 bodů,
      %vel=3 odpovídá okolí 49 bodů atd.
smerOdchylka=75 %nastavení sigma v uhlových minutách
n=n+1
[xP,yP]=meshgrid(-19.875+vel*0.25:0.25:54.875-vel*0.25,-
34.875+vel*0.25:0.25:39.875-vel*0.25);

    mat=zeros(1+vel*2,1+vel*2);

    for matI=1:(1+vel*2)
        for matJ=1:(1+vel*2)
%            Gaussova funkce
            mat(matI,matJ)=exp(-((matI-vel-1)^2+(matJ-vel-1)^2)/((smerOdchylka/15)^2));
        end
    end

prum=zeros(radky-vel*2,sloupce-vel*2);
for i=1+vel:radky-vel
    for j=1+vel:sloupce-vel
        okoli=matice(i-vel:i+vel,j-vel:j+vel);
        matPrenasobena=mat.*okoli;
        prum(i-vel,j-vel)=sum(reshape(matPrenasobena,1,[]))/sum(reshape(mat,1,[]));
    end
end

%% rozdíl a charakteristiky přesnosti
refOrez=maticeRef(vel+1:end-vel,vel+1:end-vel);
rozdil=rot90(prum)-rot90(refOrez);%pro data od min šířky do max šířky,
                                  %jinak nutno upravit
m=max(abs(reshape(rozdil,1,[])));
r=rms(reshape(rozdil,1,[]));
chybaR(n)=r;
chybaM(n)=m;
minMag(n)=min(reshape(prum,1,[]));
maxMag(n)=max(reshape(prum,1,[]));
```